

4次元回転と四元数

中嶋 慧

January 4, 2020

Abstract

この記事では、4次元ローレンツ変換および4次元ユークリッド空間の回転の四元数による表式を証明する。

Contents

1	4次元回転と四元数	1
2	ローレンツ変換	2
3	ユークリッド4次元回転	3
A	スピン群	5
A.1	$O(p, q)$ 群	5
A.2	ピン群	5

1 4次元回転と四元数

i_1, i_2, i_3 を四元数の虚数単位とする。 h を $h^2 = -1$ で、 i_k と可換な数とする¹⁾。4次元ミンコフスキー空間の点は、

$$q = q_0 + q_k h i_k \quad (q_\mu \in \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

と表される。このとき、

$$q\tilde{q} = q_0^2 - q_k^2 \quad (1.2)$$

である。 \tilde{X} は X の四元数としての共役を表す。 h についての複素共役は X^* とする。 X が、

$$X = x_0 + x_k i_k \quad (x_\mu \in \mathbb{C}) \quad (1.3)$$

のとき、 X を双四元数という。ローレンツ変換は、 A を双四元数として、

$$q' = AX\tilde{A}^*, \quad A\tilde{A} = 1 \quad (1.4)$$

¹⁾ラテン (小) 文字の添え字は 1, 2, 3 を表し、ギリシャ (小) 文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表す。

と書ける (§ 2)。特に、 $\tilde{A}^* = A$ の場合がローレンツブーストで、 $A^* = A$ の場合が 3 次元空間回転である。

4 次元ユークリッド空間の点は、

$$q = q_0 + q_k i_k \quad (q_\mu \in \mathbb{R}) \quad (1.5)$$

で表される。4 次元回転は、 A, B を単位四元数 ($A\tilde{A} = 1 = B\tilde{B}$) として、

$$q' = AqB \quad (1.6)$$

となる (§ 3)。

2 ローレンツ変換

e_μ を、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.1)$$

を満たす数とする。4 次元ミンコフスキー空間の点は、

$$Q = q_0 e_0 + q_k e_k \quad (2.2)$$

と表現される。付録 A より、ローレンツ変換 ($SO_+(1, 3)$ の元) は、

$$Q' = AQA^{-1}, \quad A = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_n}, \quad X_k = \sum_{\mu < \nu} c_{\mu\nu}^{(k)} e_\mu e_\nu \quad (2.3)$$

と書ける。 $c_{\mu\nu}^{(k)}$ は実数である。ところで、

$$h = -e_0 e_1 e_2 e_3, \quad (2.4)$$

$$h i_k = e_0 e_k, \quad (2.5)$$

$$i_1 = e_2 e_3, \quad i_2 = e_3 e_1, \quad i_3 = e_1 e_2 \quad (2.6)$$

という同一視が出来る。よって、 X_k は双 (純) 四元数とみなせる。また、

$$q \stackrel{\text{def}}{=} e_0 Q = q_0 + q_k h i_k \quad (2.7)$$

であり、

$$\begin{aligned} AQA^{-1} &= Ae_0 q A^{-1} \\ &= e_0 A^* q A^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

である。実際、

$$Ae_0 = e_0 B \quad (2.9)$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
B &= e_0 A e_0 = e_0 e^{X_1} e_0 e_0 e^{X_2} e_0 \cdots e_0 e^{X_n} e_0 \\
&= e^{e_0 X_1 e_0} e^{e_0 X_2 e_0} \cdots e^{e_0 X_n e_0} \\
&= e^{X_1^*} e^{X_2^*} \cdots e^{X_n^*} = A^*
\end{aligned} \tag{2.10}$$

である。よって、ローレンツ変換は、

$$q' = A^* q A^{-1} = A^* q \tilde{A} = B q \tilde{B}^* \tag{2.11}$$

となる。 $B\tilde{B} = BB^{-1} = 1$ である。

3 ユークリッド4次元回転

e_μ を、

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\text{diag}(1, 1, 1, 1) \tag{3.1}$$

を満たす数とする。4次元ミンコフスキー空間の点は、

$$Q = q_0 e_0 + q_k e_k \tag{3.2}$$

と表現される。付録Aより、4次元回転 (SO(4) の元) は、

$$Q' = A Q A^{-1}, \quad A = e^X, \quad X = \sum_{\mu < \nu} c_{\mu\nu} e_\mu e_\nu \tag{3.3}$$

と書ける。 $c_{\mu\nu}$ は実数である。ところで、

$$j \stackrel{\text{def}}{=} e_0 e_1 e_2 e_3, \tag{3.4}$$

$$j i_k = e_0 e_k, \tag{3.5}$$

$$i_1 = -e_2 e_3, \quad i_2 = -e_3 e_1, \quad i_3 = -e_1 e_2 \tag{3.6}$$

という同一視が出来る。 $j^2 = 1$ である。よって、 X_k は分解型双 (純) 四元数とみなせる²⁾。また、

$$q \stackrel{\text{def}}{=} e_0 Q = q_0 + q_k j i_k \tag{3.7}$$

であり、

$$\begin{aligned}
A Q A^{-1} &= A e_0 q A^{-1} \\
&= e_0 A^* q A^{-1}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

である。 A^* は j についての共役である。よって、4次元回転は、

$$q' = A^* q A^{-1} \tag{3.9}$$

²⁾ $x = x_0 + x_k i_k$ で $x_\mu = x'_\mu + j x''_\mu$ の形の数 x を分解型双四元数という。

となる。

さて、 X', X'' を四元数とするとき、

$$T(X' + jX'') = X' + X'' \quad (3.10)$$

とすると、分解型双四元数 X, Y に対して、

$$T(XY) = T(X)T(Y) \quad (3.11)$$

である。よって、(3.9) より、

$$T(q') = e^{T(X^*)}T(q)e^{-T(X)} \quad (3.12)$$

である。今、 $p = T(q)$, $A = e^{T(X^*)}$, $B = e^{-T(X)}$ とすると、

$$p' = ApB \quad (3.13)$$

であり、 A, B は単位四元数である ($T(X^*)$, $-T(X)$ は純四元数である)。 p と q とは 1 対 1 に対応する。

A スピン群

A.1 $O(p, q)$ 群

0以上の整数 p, q ($p + q \geq 1$) に対して、

$$O(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda^a_b \in M(p+q, \mathbb{R}) \mid g^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i_a \Lambda^j_b g^{(q,p)}_{ij}\} \quad (\text{A.1})$$

とする³⁾。ただし、 $g^{(q,p)}_{ab}$ は $(q+p)$ 次の対角行列で、その最初の q 成分が⁴⁾ -1 で、残りの p 成分が⁵⁾ 1 である。 $a, b = 0, 1, \dots, p+q-1$ である。また、

$$SO(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda^a_b \in O(p, q) \mid \det(\Lambda^a_b) = 1\} \quad (\text{A.2})$$

とする。 $d \geq 1$ に対して、 $O(d, 1)$ をローレンツ群と呼ぶ。また、

$$SO_+(d, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda^a_b \in SO(d, 1) \mid \Lambda^0_0 > 0\} \quad (\text{A.3})$$

を狭義ローレンツ群と呼ぶ。

A.2 ピン群

この節では、ピン群について解説する。ピン群は、(すぐ後で定義する)クリフォード代数を用いて定義される。

今、

$$e_a e_b + e_b e_a = 2g^{(q,p)}_{ab} \quad (\text{A.4})$$

を満たす量の組 $\{e_a\}_{a=0,1,\dots,q+p-1}$ を考える。 e_a は時空点によらないとする ($\partial_\mu e_a = 0$)。クリフォード代数と呼ばれる集合 $\mathcal{C}^{(p,q)}$ を、

$$\mathcal{C}^{(p,q)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ a^0 + \sum_{k=1}^n \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq q+p-1} a^{i_1 i_2 \dots i_k} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid a^0 \in \mathbb{R}, a^{i_1 i_2 \dots i_k} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{A.5})$$

で定義する。さらに、

$$\mathcal{C}_*^{(p,q)} \stackrel{\text{def}}{=} \{S \in \mathcal{C}^{(p,q)} \mid \exists U \in \mathcal{C}^{(p,q)}, SU = 1 = US\} \quad (\text{A.6})$$

とし、クリフォード群 $\Gamma^{(p,q)}$ を、

$$\Gamma^{(p,q)} \stackrel{\text{def}}{=} \{S \in \mathcal{C}_*^{(p,q)} \mid \exists \Lambda^a_b \in M(p+q, \mathbb{R}), S e_a S^{-1} = \Lambda^b_a e_b\} \quad (\text{A.7})$$

で定義する。 $S \in \Gamma^{(p,q)}$ に対して、

$$e'_a \stackrel{\text{def}}{=} S e_a S^{-1} = [\rho(S)]^b_a e_b =: \rho^b_a e_b \quad (\text{A.8})$$

³⁾ $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に対して、成分が \mathbb{K} に属する n 次正方行列全体を $M(n, \mathbb{K})$ と書く。

⁴⁾ $O(p, q)$ の定義において、 $g^{(q,p)}_{ab}$ は最初の p 成分が⁴⁾ 1 で、残りの q 成分が⁵⁾ -1 の対角行列とされることが多い。

⁵⁾ $g^{(q,p)}_{ab} = \Lambda^i_a \Lambda^j_b g^{(q,p)}_{ij}$ の両辺の行列式を計算すると、 $[\det(\Lambda^a_b)]^2 = 1$ を得る。

で $\rho(\mathbf{S})$ を定める。 $\rho(\mathbf{S}) \in O(p, q)$ であることは、次のようにして分かる。まず、

$$\begin{aligned} e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \mathbf{S}(e_a e_b + e_b e_a) \mathbf{S}^{-1} \\ &= 2g_{ab}^{(q,p)} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

である。また、

$$\begin{aligned} e'_a e'_b + e'_b e'_a &= \rho^c{}_a \rho^d{}_b (e_c e_d + e_d e_c) \\ &= 2\rho^c{}_a \rho^d{}_b g_{cd}^{(q,p)} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

である。上2式より、 $\rho(\mathbf{S}) \in O(p, q)$ が分かる。 $\mathbf{S}, \mathbf{S}' \in \Gamma^{(p,q)}$ に対して、 $\rho(\mathbf{S}'\mathbf{S}) = \rho(\mathbf{S}')\rho(\mathbf{S})$ であるから、 ρ は $O(p, q)$ の表現である。また、0でない実数 a に対して、 $\rho(a\mathbf{S}) = \rho(\mathbf{S})$ である。 $\text{Spin}(p, q)$ と書かれる、 $\Gamma^{(p,q)}$ の部分群が存在し、

$$\rho(\text{Spin}(p, q)) = \text{SO}(p, q) \quad (\text{A.11})$$

となる [1]。 $\text{Spin}(p, q)$ の定義は、すぐ後の (A.16) である。 $\text{Spin}(p, q)$ はスピン群と呼ばれる。 $\text{Spin}(p, q)$ は、すぐ後で定義されるピン群 $\text{Pin}(p, q)$ の部分群であり、 $\text{SO}(p, q)$ の二重被覆群である⁶⁾

$\text{Pin}(p, q)$, $\text{Spin}(p, q)$ は次のように定義される⁷⁾。今、 $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元に作用する演算子 r を、

$$r(ae_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}) \stackrel{\text{def}}{=} a(-1)^{(p+1)k} e_{i_k}\cdots e_{i_2}e_{i_1}, \quad (\text{A.12})$$

$$r(a) \stackrel{\text{def}}{=} a \quad (\text{A.13})$$

によって定義する。ここで、 a は実数であり、 $i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1, \dots, p+q-1$ である。また、 $\mathbf{S} \in \mathcal{C}^{(p,q)}$ に対して、

$$N(\mathbf{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}r(\mathbf{S}) \quad (\text{A.14})$$

と定義する。 $\mathbf{S} \in \Gamma^{(p,q)}$ のとき、 $N(\mathbf{S}) = a$ となる、0でない実数 a が存在する。 $\text{Pin}(p, q)$ は、

$$\text{Pin}(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{S} \in \Gamma^{(p,q)} | N(\mathbf{S}) = \pm 1\} \quad (\text{A.15})$$

で定義される⁸⁾。また、

$$\text{Spin}(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Pin}(p, q) \cap \mathcal{C}_0^{(p,q)}, \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Spin}_+(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{S} \in \text{Spin}(p, q) | N(\mathbf{S}) = 1\} \quad (\text{A.17})$$

である。ここで、 $\mathcal{C}_0^{(p,q)}$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、 $\{e_a\}$ の偶数次のみからなる元の集合である。なお、 $\mathcal{C}_1^{(p,q)}$ は $\mathcal{C}^{(p,q)}$ の元のうち、 $\{e_a\}$ の奇数次のみからなる元の集合である。

⁶⁾また、 $d \geq 1$ に対して、 $\text{Spin}(d, 1)$ の部分群 $\text{Spin}_+(d, 1)$ が存在し、それは $\text{SO}_+(d, 1)$ の二重被覆群である。 $\text{Spin}_+(p, q)$ は (A.17) で定義される。

⁷⁾この段落の記述は、 [1] を参考にした。

⁸⁾ $\text{Pin}(p, q)$ の任意の元は、 $v_1 v_2 \cdots v_n$ の形に書ける。ただし、 $v_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ は、 $v_\alpha = \sum_{j=0}^{p+q-1} a_\alpha^j e_j$ ($a_\alpha^j \in \mathbb{R}$) の形の $\mathcal{C}_*^{(p,q)}$ の元である。

$(p + q)$ が偶数の時は、

$$\rho(\text{Pin}(p, q)) = \text{O}(p, q) \tag{A.18}$$

となり、 $\text{Pin}(p, q)$ は $\text{O}(p, q)$ の二重被覆群である [1, 2]。

$\text{Spin}_+(p, q)$ のリー代数は、

$$\text{spin}(p, q) = \left\{ \sum_{a < b} c_{ab} e_a e_b \mid c_{ab} \in \mathbb{R} \right\} \tag{A.19}$$

である。 $\text{Spin}_+(p, q)$ の任意の元 \mathbf{S} は、

$$\mathbf{S} = \exp(X_1) \exp(X_2) \cdots \exp(X_k), \quad X_i \in \text{spin}(p, q) \tag{A.20}$$

と書ける。特に $q = 0$ なら $k = 1$ となる。

References

- [1] M. Rausch de Traubenberg, “Clifford Algebras in Physics”, arXiv:hep-th/0506011.
- [2] M. Berg, C. DeWitt-Morette, S. Gwo and E. Kramer, “The Pin Groups in Physics: C, P, and T”, Rev. Math. Phys. **13**, 953 (2001). [arXiv:math-ph/0012006]