静磁場中の運動：複素数による解法

中嶋 慧

平成 29 年 10 月 6 日

この解法は、私が高専の 3 年生のときに思い付いたものである。なぜかほとんど紹介されないので、ここにメモを書く。

1　静磁場中の運動

静電場 $\boldsymbol{E}$ と静磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ 中での運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = q(\boldsymbol{E} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1}$$

を複素数を使って解く。(1.1) は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = q(E_x + \frac{dy}{dt}B) \tag{1.2}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = q(E_y - \frac{dx}{dt}B) \tag{1.3}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = qE_z \tag{1.4}$$

である。今、

$$w \stackrel{\text{def}}{=} x + iy, \tag{1.5}$$

$$E \stackrel{\text{def}}{=} E_x + iE_y \tag{1.6}$$

と置くと、(1.2)+i(1.3) より、

$$m\frac{d^2w}{dt^2} = q(E - i\frac{dw}{dt}B) \tag{1.7}$$

を得る。$v = \frac{dw}{dt}$ として、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m}(E - ivB) = \frac{q}{m}(-iB)(v + iE/B), \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{v + iE/B}\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m}(-iB) \tag{1.9}$$

となる。両辺を $t = 0$ から $t = t$ まで積分して、

$$\ln\frac{v(t) + iE/B}{v(0) + iE/B} = -i\frac{qB}{m}t, \tag{1.10}$$

$$\frac{v(t) + iE/B}{v(0) + iE/B} = \exp\Big(-i\frac{qB}{m}t\Big), \tag{1.11}$$

$$v(t) = (v(0) + i\frac{E}{B})\exp\Big(-i\frac{qB}{m}t\Big) - i\frac{E}{B} \tag{1.12}$$

$$= v(0)\exp\Big(-i\frac{qB}{m}t\Big) + i\frac{E}{B}\Big[\exp\Big(-i\frac{qB}{m}t\Big) - 1\Big]. \tag{1.13}$$

(1.12) を $t=0$ から $t=t$ まで積分して、

$$\begin{aligned} w(t) &= w(0) + (v(0) + i\frac{E}{B})i\frac{m}{qB}\Big[\exp\Big(-i\frac{qB}{m}t\Big) - 1\Big] - i\frac{E}{B}t \\ &= w(0) + \frac{m}{qB}(iv(0) - \frac{E}{B})\Big[\exp\Big(-i\frac{qB}{m}t\Big) - 1\Big] - i\frac{E}{B}t. \end{aligned} \tag{1.14}$$

実部と虚部から $x(t),\ y(t)$ が分かる。しかし、むしろこの形の方が、運動の様子がイメージしやすい。$\exp\Big(-i\frac{qB}{m}t\Big)$ は、xy 平面での回転を表し、その角速度と向きは容易にわかる。

この解法は、行列を使うものより簡単である。