共変正準形式における局所変換の生成子とネーターカレント

S. Nakajima, J. Phys. Soc. Jpn. **92**, 084001 (2023).

中嶋慧・松尾衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』
現代数学社, 2020年

中嶋 慧 (電気通信大学)

2024年9月30日

自己紹介

専門分野:非平衡統計力学(ゆらぎの熱力学), 量子基礎論, 共変正準形式

量子ポンプ
過剰エントロピー生成
スピード限界
熱力学的不確定性関係
量子測定・量子操作の速さ・精度トレードオフ

2012年3月 筑波大学 理工学群物理学類 卒業 (学士(理学) , 指導教員:有光 敏彦)
2014年3月 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 物理学専攻 修士課程 修了
(修士(理学), 指導教員:都倉 康弘)
2017年3月 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 ナノサイエンス・ナノテクノロジー専攻
(博士(理学), 指導教員:都倉 康弘)
2017年4月から10月 ITエンジニア
2017年10月から2021年3月 無職
(中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』現代数学社, 2020年)
2021年4月 三重大学大学院 工学研究科 研究員(内海研)
2023年6月 電気通信大学大学院 情報理工学研究科 特任研究員(田島研)

共変解析力学とは

共変解析力学とは、微分形式と「微分形式の微分形式による微分」を用いて定式化された、時間と空間を平等に扱う解析力学である。

特に、正準形式の部分を共変正準形式という。

電磁場, ゲージ場, 重力場が非拘束系となるという著しい性質を持つ。

従来の解析力学

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) \qquad \partial_\mu \psi = (\partial_0 \psi, \nabla \psi)$$

ハミルトン形式

$$\pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}$$

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \psi - \mathcal{L} = \mathcal{H}(\psi, \nabla \psi, \pi)$$

[問題1]時間を特別扱いし、相対論的共変性が自明でない

電磁場 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0$$

[問題2]正準運動量は独立ではない ⟶ ゲージ固定，ディラック括弧

微分形式(1)

微分形式は座標系に依らない

1形式(ベクトルポテンシャル = 電磁場)

$$A = A_\mu dx^\mu$$

2形式(電磁場の強さ)

$$\begin{aligned} F &= dA \\ &= \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

外微分

$$d\bullet = dx^\mu \wedge \partial_\mu \bullet$$

外積(反対称化積)

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$$

磁場についてのガウス則, ファラデー則

$$dF = ddA = 0$$

$$\Longleftrightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{aligned} dd\bullet &= \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \bullet \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

微分形式(2)

*p*形式($p = 0,1,\ldots,d$)

$$\omega = \underbrace{\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}}_{\text{完全反対称テンソル}} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

Dualな(d-p) = r形式

$$*\omega = \frac{1}{r!} E^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_r} \omega_{\mu_1\cdots\mu_p} dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_r}$$

$E_{\mu_1\cdots\mu_d}$ は完全反対称で、$E_{01\ldots D} = 1 \ (D = d-1)$.

ガウス則, アンペール・マクスウェル則

$$\boxed{d * F = J} \qquad J = *(J_\mu dx^\mu)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$$

微分形式での電磁場のラグランジュ形式

Lagrangian *d*-form $L(A, dA) = -\frac{1}{2}F \wedge *F + A \wedge J = \mathcal{L}\underline{\eta}$ $F = dA$ $J = *(J_\mu dx^\mu)$

体積形式

$$\delta L = -\delta F \wedge *F + \delta A \wedge J$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = J, \ \frac{\partial L}{\partial F} = -*F$$

オイラー・ラグランジュ方程式 $\frac{\partial L}{\partial A} + d\frac{\partial L}{\partial dA} = 0$

$$d * F = J$$

$$\delta\beta = \delta\alpha_k \wedge \underline{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha_k}}$$

微分の定義

$$\delta L = \delta\psi \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi}\right) + d\left(\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}\right)$$

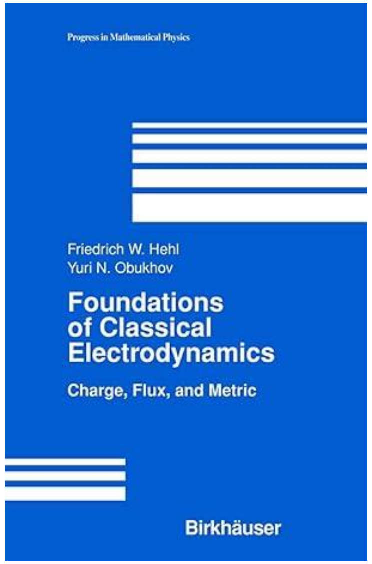
ψ は p 形式

微分形式の微分形式による微分は、遅くても1972年頃からは使われている。

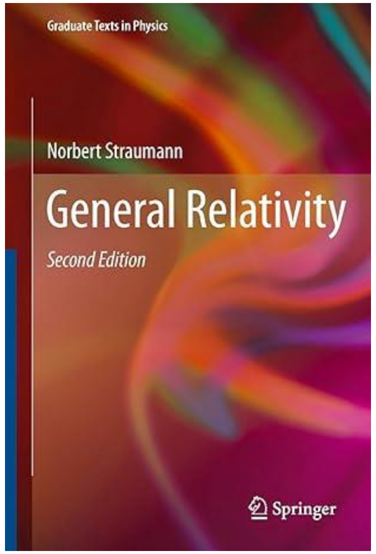
微分形式の微分形式による微分

Hehl and Obukhov,
“Foundations of Classical Electrodynamics : Charge, Flux, and Metric” (2003)

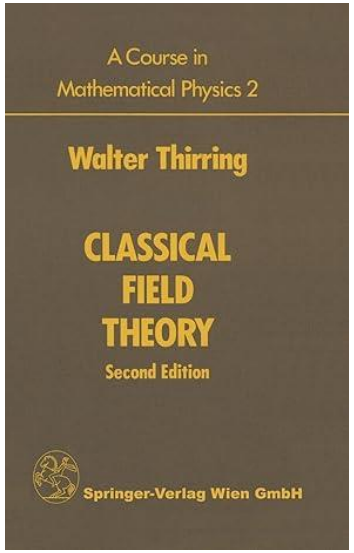
F. W. Hehl, et.al.,
“Metric-affine gauge theory of gravity”,
Physics Reports **258**, 1 (1995).



Norbert Straumann,
“General Relativity”
(2013)



W. Thirring,
“A Course in Mathematical Physics 2”
(1978)



共変正準形式

p 形式 ψ の **共変微分形式** $\pi \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial L}{\partial d\psi}$ $(d\text{-}p\text{-}1) = q\text{-form}$

問題1は解決

Hamilton *d*-form $H = H(\psi, \pi) \overset{\text{def}}{=} d\psi \wedge \pi - L$

$$\begin{aligned}\delta H &= \delta d\psi \wedge \pi + d\psi \wedge \delta\pi - \delta L \\ &= \cancel{\delta d\psi \wedge \pi} + (-1)^{(p+1)q}\delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} - \cancel{\delta d\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}} \\ &= (-1)^{(p+1)q}\delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi}\end{aligned}$$

恒等式 $\dfrac{\partial H}{\partial \pi} = (-1)^{(p+1)q} d\psi, \quad \dfrac{\partial H}{\partial \psi} = -\underline{\dfrac{\partial L}{\partial \psi}}.$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0$$

共変正準方程式 $\boxed{d\psi = (-1)^{(p+1)q}\dfrac{\partial H}{\partial \pi}, \quad d\pi = -(-1)^p \dfrac{\partial H}{\partial \psi}.}$

A. D'Adda, J. E. Nelson, and T. Regge, Ann. Phys. **165**, 384 (1985).
中村匡, 物性研究 **79**, 1 (2002).

電磁場の共変正準形式

共役微分形式 $\pi \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial L}{\partial dA} = \underline{-*F}$ ⟷ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0$

独立　$dA = *\pi$

問題2も解決

A は d 成分で、その共役量 π は $d(d-1)/2$ 成分。

Hamilton *d*-form (not (*d*-1)-form)

$$H(A,\pi) = \frac{1}{2}\pi \wedge *\pi - A \wedge J$$

共変正準方程式

$$dA = \frac{\partial H}{\partial \pi},\ \ d\pi = \frac{\partial H}{\partial A}$$

$\boxed{dA = *\pi,\ \ d\pi = -J}$　ゲージ共変。ゲージ固定不要

拘束系と非拘束系

非拘束系

・ゲージ場
・2階形式の重力場
(多脚場のみが力学変数)
・スカラー場

拘束系

・1階形式の重力場
(多脚場とスピン接続が力学変数)
・ディラック場
・超重力理論

De Donder-Weyl理論

De Donder(ド・ドンデ) (1930), H. Weyl (1934)

$$\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p})}$$

$$\mathcal{H}^{\mathrm{DW}} := \partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]}\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} - \mathcal{L}$$

De Donder-Weyl方程式

$$\begin{aligned}\partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]} &= \frac{\partial\mathcal{H}^{\mathrm{DW}}}{\partial\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}},\\ \partial_\mu\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} &= \frac{\partial\mathcal{H}^{\mathrm{DW}}}{\partial\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}.\end{aligned}$$

De Donder-Weyl方程式は共変正準方程式と等価。
(中嶋・松尾『一般ゲージ理論と共変解析力学』現代数学社, 2020年)

しかし、ポアソン括弧は共変正準形式とDe Donder-Weyl理論とで異なる。

ポアソン括弧

a形式

$$\{A,B\}=(-1)^{p(a+d+1)}\frac{\partial A}{\partial\psi}\wedge\frac{\partial B}{\partial\pi}-(-1)^{(d+p-1)(a+1)}\frac{\partial A}{\partial\pi}\wedge\frac{\partial B}{\partial\psi}$$

$$\{B,A\}=-(-1)^{(a+d+1)(b+d+1)}\{A,B\},$$

$$\{A,B\wedge C\}=\{A,B\}\wedge C+(-1)^{(a+d+1)b}B\wedge\{A,C\},$$

B は b 形式
C は c 形式

ヤコビ恒等式

$$(-1)^{(a+d+1)(c+d+1)}\{A,\{B,C\}\}+(-1)^{(b+d+1)(a+d+1)}\{B,\{C,A\}\}+(-1)^{(c+d+1)(b+d+1)}\{C,\{A,B\}\}=0$$

$$d\psi=-\{H,\psi\},\quad d\pi=-\{H,\pi\}.$$

$$\{\psi,\pi\}=(-1)^{pd},\quad\{\pi,\psi\}=-1$$

$$dF=d\psi\wedge\frac{\partial F}{\partial\psi}+d\pi\wedge\frac{\partial F}{\partial\pi}=-\{H,F\}$$

Y. Kaminaga, Electron. J. Theor. Phys. **14**, 55 (2018) [arXiv:1703.06718v1].
L. Castellani and A. D’Adda, Phys. Rev. D **101**, 025015 (2020).

シンプレクティック理論

$$Z^a := \psi^A, \pi_A$$

$$\tilde{\partial}_a[F] := \frac{\partial F}{\partial Z^a}$$

$$\tilde{d}Z^a[\tilde{\partial}_b] := \delta^a_b$$

$$\tilde{\omega} := -\tilde{d}\psi^A \wedge \tilde{d}\pi_A$$ シンプレクテッィク形式

$$\tilde{d}f = I_{X_f}\tilde{\omega} \qquad X = X^a \wedge \tilde{\partial}_a$$

内部積

ポアソン括弧 $$\boxed{\{f, g\} := I_{X_f} I_{X_g} \tilde{\omega}}$$

Y. Kaminaga, Electron. J. Theor. Phys. **14**, 55 (2018) [arXiv:1703.06718v1].

変換の生成子

微小変換

$$\psi^A \to \psi^A + \delta\psi^A\,, \quad \pi_A \to \pi_A + \delta\pi_A$$

に対して、

$$\delta\psi^A = \{\psi^A, G\}\,, \quad \delta\pi_A = \{\pi_A, G\}$$

を満たす(d - 1)形式Gが存在するとき、それを変換の生成子という。

F が ψ^A, π_A で表されるとき、$\delta F = \{F, G\}$ となる。

L. Castellani and A. D’Adda, Phys. Rev. D **101**, 025015 (2020). ← 拘束系である1階形式の重力場

従来の解析力学では、多くの場合、

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^{d-1}x\ N^0$$

ネーターカレントの時間成分

が変換の生成子となる。共変正準形式では、以下に示すように、ネーターカレント形式自身が変換の生成子となる。

ネーターカレント

微小変換 $\psi^A \to \psi^A + \delta\psi^A$ に対して、恒等的に

$$\delta L \equiv \delta\psi^A \wedge [L]_A + d\Big(\delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi^A}\Big)$$

$$[L]_A := \frac{\partial L}{\partial \psi^A} - (-1)^{p_A} d\frac{\partial L}{\partial d\psi^A}$$

が成り立つ。もしも、 $\delta L \equiv dl$ と書けるとき、ネーターカレント

$$N := \delta\psi^A \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi^A} - l$$

は、オイラー・ラグランジュ方程式 $[L]_A = 0$ のもとで保存する：

$$dN = 0.$$

共役形式の変換則

0 でない $\xi^A{}_B := \partial\delta\psi^A/\partial\psi^B$ が全て 0 形式であり、$\delta\psi^A, l$ が $d\psi^B$ を含まないとき、

$$\pi_A \to \pi'_A = \pi_A + \delta\pi_A\,, \quad \delta\pi_A = -\xi^B{}_A\pi_A + \frac{\partial l}{\partial\psi^A}$$

となる。

(証明)

$$\Delta\psi^A = (\delta^A_B - \xi^A{}_B)\Delta\psi'^B,$$
$$\Delta d\psi^A = (\delta^A_B - \xi^A{}_B)\Delta d\psi'^B - (-1)^p\Delta\psi'^B \wedge d\xi^A{}_B.$$

これを $\Delta L = \Delta\psi^A \wedge \dfrac{\partial L}{\partial\psi^A} + \Delta d\psi^A \wedge \dfrac{\partial L}{\partial d\psi^A}$ に代入して、

$$\frac{\partial L}{\partial d\psi'^A} = (\delta^B_A - \xi^B{}_A)\pi_B$$ を得る。よって、

$$\pi'_A = \frac{\partial L'}{\partial d\psi'^A} \underset{\substack{\uparrow \\ L' = L + dl}}{=} \frac{\partial L}{\partial d\psi'^A} + \frac{\partial l}{\partial\psi'^A} = (\delta^B_A - \xi^B{}_A)\pi_B + \frac{\partial l}{\partial\psi^A}.$$

ネーターカレントは生成子である

$$N = \underline{\delta\psi^A} \wedge \pi_A - \underline{l}$$

π_B を含まないと仮定

$$\begin{aligned}
\{\psi^A, N\} &= (-1)^{p(p+d+1)} \frac{\partial N}{\partial \pi_A} \\
&= \delta\psi^A, \\
\{\pi_A, N\} &= -(-1)^{(d+p+1)(d-p)} \frac{\partial N}{\partial \psi^A} \\
&= -\xi^B{}_A \pi_B + \frac{\partial l}{\partial \psi^A} \\
&= \delta\pi_A .
\end{aligned}$$

S. Nakajima, J. Phys. Soc. Jpn. **92**, 084001 (2023).

局所ゲージ変換

$$L = L_0(\psi^A, \underline{(D\psi)^A}) + L_1$$

$$d\psi^A + A^r(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B \wedge \psi^B$$

$$\delta\psi^A = \varepsilon^r(\boldsymbol{G}_r)^A{}_B\psi^B\,, \quad \delta A^r = \varepsilon^s f^r{}_{st}A^t - d\varepsilon^r\,, \quad \delta L_0 = 0\,, \quad \delta L_1 = 0.$$

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] = \underline{f^t{}_{rs}}\boldsymbol{G}_t$$

構造定数

大域的変換の生成子

$$N = \varepsilon^r N_r + d\varepsilon^r \wedge F_r\,,$$

$$N_r = N_r^{(0)} + N_r^{(1)},$$

$$N_r^{(0)} = (\boldsymbol{G}_r)^A{}_B\psi^B \wedge \pi_A,$$

$$N_r^{(1)} = f^s{}_{rt}A^t \wedge \pi_s.$$

$$F_r = -\pi_r$$

$$\{G_r, G_s\} = f^t{}_{rs}G_t \quad (G_r = N_r, N_r^{(0)}, N_r^{(1)})$$

重力場(2階形式)

計量テンソル $g = \mathring{g}_{ab}\underline{\theta^a} \otimes \theta^b \text{ with } \mathring{g}_{ab} := \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1).$

多脚場 = フレーム形式

曲率2形式 $\Omega^a{}_b := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \underline{\omega^c{}_b}$

接続1形式 = スピン接続 $\omega_{ba} = -\omega_{ab}$

$$\eta^a = *\theta^a, \ \eta^{ab} = *(\theta^a \wedge \theta^b), \ \eta^{abc} = *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c), \ \eta^{abcd} = *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c \wedge \theta^d)$$

$$L_{\mathrm{G}}(\theta, d\theta) = \frac{1}{2\kappa} W, \quad W := \Omega^{ab} \wedge \eta_{ab} - d(\omega^{ab} \wedge \eta_{ab})$$

局所ローレンツ変換

$$\delta\theta^a = \varepsilon^a{}_b\theta^b, \quad \varepsilon_{ba} = -\varepsilon_{ab}$$

$$\pi_a = \frac{1}{2\kappa}\omega^{bc} \wedge \eta_{abc}$$

$$\delta\omega^{ab} = \varepsilon^a{}_c\omega^{cb} + \varepsilon^b{}_c\omega^{ac} - d\varepsilon^{ab},$$

$$\delta L = dl\,, \quad l = -\frac{1}{2}d\varepsilon^{ab} \wedge F_{ab}\,, \quad F_{ab} = -\frac{1}{\kappa}\eta_{ab}.$$

$$N = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}N_{ab} + \frac{1}{2}d\varepsilon^{ab} \wedge F_{ab},$$

$$N_{ab} = N_{ab}^{(0)} + N_{ab}^{(1)},$$

$$N_{ab}^{(0)} = 2\frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial\omega^{ab}},$$

$$N_{ab}^{(1)} = \theta_b \wedge \pi_a - \theta_a \wedge \pi_b$$

$$\{N_{ab}^{(1)}, N_{cd}^{(1)}\} = \mathring{g}_{bc}N_{ad}^{(1)} - \mathring{g}_{ac}N_{bd}^{(1)} + \mathring{g}_{ad}N_{bc}^{(1)} - \mathring{g}_{bd}N_{ac}^{(1)}$$

S. Nakajima, J. Phys. Soc. Jpn. **92**, 084001 (2023).

生成子の生成子？

$G = \varepsilon^r G_r + d\varepsilon^r \wedge F_r$ の形の生成子による変換により、ラグランジアンformが全微分だけしか変化しないとき、

$$G_r = -\{F_r, H\}$$

がオイラー・ラグランジュ方程式を使わずに成り立つ。

L. Castellani and A. D’Adda, Phys. Rev. D **101**, 025015 (2020).

まとめ, 展望

局所微小変換 $\psi^A \to \psi^A + \delta\psi^A$ に対して、$\delta L \equiv dl$ が成り立つとする。

0 でない $\xi^A_B := \partial\delta\psi^A / \partial\psi^B$ が全て 0 形式であり、$\delta\psi^A, l$ が $d\psi^B$ を含まないとき、

ネーターカレント形式は、変換の生成子である。

S. Nakajima, J. Phys. Soc. Jpn. **92**, 084001 (2023).

隠れた対称性への拡張？

共変正準形式の量子化への応用？

De Donder-Weyl理論のポアソン括弧

$$\Theta^V := p_a^i dy^a \wedge \partial_i \lrcorner \widetilde{vol}.$$

$$\Omega^V := -dy^a \wedge dp_a^i \wedge \partial_i \lrcorner \widetilde{vol}.$$ polysymplectic form

$$\overset{p}{X}_F \lrcorner\ \Omega = d^V \overset{n-p}{F}.$$

$$\overset{p}{X}{}^V := \frac{1}{p!} \overset{p}{X}{}^{v i_1 \ldots i_{p-1}}(z)\, \partial_v \wedge \partial_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_{p-1}}.$$

$$d^V \Phi = \frac{1}{p!} \partial_v \Phi^{M_1 \ldots M_p} dz^v \wedge dz^{M_1} \wedge \ldots \wedge dz^{M_p}$$

$$z^v = (y^a, p_a^i), \qquad \{dz^M\} := \{dz^v, dx^i\}$$

ポアソン括弧

$$\boxed{\{\![\overset{r}{F}_1, \overset{s}{F}_2]\!\} = (-1)^{(n-r)} \overset{n-r}{X}{}_1 \lrcorner \overset{n-s}{X}{}_2 \lrcorner\ \Omega.}$$

I. V. Kanatchikov, Rep. Math. Phys. **41**, 49 (1998).