物質中での補助場 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ ：特殊相対論

中嶋 慧

September 14, 2020

Abstract

物質が静止して見える座標系では、その物質中での $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ は、電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$ と、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

の関係にある。物質に対して等速直線運動する座標系では、この関係は、

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{c\mu}F^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{c\mu} - c\varepsilon\right)\frac{1}{c^2}(F_\rho{}^\nu w^\rho w^\mu - F_\rho{}^\mu w^\rho w^\nu) \tag{0.1}$$

となる。ここで、w^μ は物質の 4 元速度ベクトルで、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD_1 & cD_2 & cD_3 \\ -cD_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -cD_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -cD_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。(0.1) を、クリフォード代数を用いる方法と、座標変換を用いる方法とでそれぞれ導出する。

Contents

1　問題設定

物質が静止して見える座標系 Σ_0 では、その物質中での $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ は、電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$ と、

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{1.1}$$
$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} \tag{1.2}$$

の関係にある。Σ_0 から見て速度 $(-\boldsymbol{v})$ で等速直線運動する座標系 Σ ではこの関係はどうなるだろうか？

今、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & cB_3 & -cB_2 \\ E_2 & -cB_3 & 0 & cB_1 \\ E_3 & cB_2 & -cB_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$
$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD_1 & cD_2 & cD_3 \\ -cD_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -cD_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -cD_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と置くと、Σ_0 で、

$$H'^{0k} = c\varepsilon F'^{0k}, \tag{1.5}$$
$$H'^{jk} = \frac{1}{c\mu}F'^{jk} \tag{1.6}$$

である。$'$ は、Σ_0 系を表す。物質の 4 元速度ベクトルを w^μ とすると、

$$H_{\mu\nu}w^\nu = c\varepsilon F_{\mu\nu}w^\nu, \tag{1.7}$$
$$H^{[\mu\nu}w^{\lambda]} = \frac{1}{c\mu}H^{[\mu\nu}w^{\lambda]} \tag{1.8}$$

である [1]。ここで、$A_{[\mu\nu\lambda]}$ は $A_{\mu\nu\lambda}$ の反対称化である。添字は、

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{1.9}$$

で下げ、その逆行列 $\eta^{\mu\nu}$ で上げる。Σ_0 では $w^0 = (c, 0, 0, 0)$ なので、(1.7) から (1.5) が、(1.8) から (1.6) が得られる。

以下では、

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{c\mu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}\Big(\frac{1}{c\mu} - c\varepsilon\Big)(F_\rho{}^\nu w^\rho w^\mu - F_\rho{}^\mu w^\rho w^\nu) \tag{1.10}$$

を 2 通りの方法で示す。1 つは座標変換の方法 [2] で、もう 1 つはクリフォード代数の方法である。以下では、

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = c = 1 \tag{1.11}$$

とする。

2　クリフォード代数の方法

$\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^3$ をクリフォード代数の基底とする。つまり、

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{2.1}$$

とする。また、

$$\gamma^{\mu\nu} := \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), \tag{2.2}$$

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} := \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\lambda]} \tag{2.3}$$

と置く。このとき、

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

$$\gamma^\lambda\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\lambda\mu}\gamma^\nu - \eta^{\lambda\nu}\gamma^\mu + \gamma^{\lambda\mu\nu} \tag{2.5}$$

である [3]。今、

$$H := \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

$$F := \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

$$w^\flat := w_\mu\gamma^\gamma, \tag{2.8}$$

$$w := w^\mu\partial_\mu \tag{2.9}$$

とする。ここで、$\rfloor$ を内部積として、

$$\partial_\mu\rfloor\gamma^\nu = \delta_\mu^\nu \tag{2.10}$$

である。また、ω を任意の p 形式, χ を任意の微分形式[1), X を任意のベクトル場として、

$$X\rfloor(\omega\wedge\chi) = (X\rfloor\omega)\wedge\chi + (-1)^p\omega\wedge(X\rfloor\chi) \tag{2.11}$$

が成り立つ。さて、(2.5) より、

$$w^\flat H = w\rfloor H + w^\flat\wedge H \tag{2.12}$$

である。ここで、

$$w^\flat\wedge H = \frac{1}{2}w_\lambda H_{\mu\nu}\gamma^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}w_{[\lambda}H_{\mu\nu]}\gamma^{\lambda\mu\nu} \tag{2.13}$$

である。また、(1.7), (1.8) は、

$$w\rfloor H = \varepsilon w\rfloor F, \tag{2.14}$$

$$w^\flat\wedge H = \frac{1}{\mu}w^\flat\wedge F \tag{2.15}$$

[1)] $w^\flat$ は 1 形式で、F, H は 2 形式である。

と書ける。よって、

$$w^\flat H = \varepsilon w \rfloor F + \frac{1}{\mu} w^\flat \wedge F \tag{2.16}$$

である。ところで、

$$w^\flat w^\flat = (w^\flat)^2 = w_\mu w^\mu = -1 \tag{2.17}$$

であるから、

$$H = -w^\flat (w^\flat H) \tag{2.18}$$

である。これに (2.16) を代入して、

$$H = -\varepsilon w^\flat (w \rfloor F) - \frac{1}{\mu} w^\flat (w^\flat \wedge F) \tag{2.19}$$

である。(2.4) より、

$$\begin{aligned} w^\flat (w \rfloor F) &= w \rfloor w \rfloor F + w^\flat \wedge (w \rfloor F) \\ &= w^\flat \wedge (w \rfloor F) \end{aligned} \tag{2.20}$$

である。また、

$$\gamma^\sigma \gamma^{\mu\nu\lambda} = 3\eta^{\sigma[\mu} \gamma^{\nu\lambda]} + \gamma^{[\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} \tag{2.21}$$

なので [3]、

$$\begin{aligned} w^\flat (w^\flat \wedge F) &= w \rfloor (w^\flat \wedge F) + w^\flat \wedge (w^\flat \wedge F) \\ &= w \rfloor (w^\flat \wedge F) \\ &= -F - w^\flat \wedge (w \rfloor F) \end{aligned} \tag{2.22}$$

である。よって、

$$H = \frac{1}{\mu} F + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon \right) w^\flat \wedge (w \rfloor F) \tag{2.23}$$

であり、

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu} F_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon \right) (F_{\rho\nu} w^\rho w_\mu - F_{\rho\mu} w^\rho w_\nu) \tag{2.24}$$

となる。これは (1.10) と一致する。

3　座標変換の方法

物質が静止して見える座標系を Σ_0, Σ_0 から見て速度 $(-\boldsymbol{v})$ で等速直線運動する座標系を Σ とし、それぞれの座標を x', x とする。今、

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu \tag{3.1}$$

とすると、

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta H'^{\alpha\beta} \\ &= (\Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_k - \Lambda^\mu{}_k \Lambda^\nu{}_0) H'^{0k} + \Lambda^\mu{}_j \Lambda^\nu{}_k H'^{jk} \end{aligned} \tag{3.2}$$

である。(1.5), (1.6) より、

$$\begin{aligned} H^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta H'^{\alpha\beta} \\ &= (\Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_k - \Lambda^\mu{}_k \Lambda^\nu{}_0) \varepsilon F'^{0k} + \Lambda^\mu{}_j \Lambda^\nu{}_k \frac{1}{\mu} F'^{jk} \end{aligned} \tag{3.3}$$

である。これより、

$$H^{\mu\nu} = (\Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_k - \Lambda^\mu{}_k \Lambda^\nu{}_0) \varepsilon (\Lambda^{-1})^0{}_\alpha (\Lambda^{-1})^k{}_\beta F^{\alpha\beta} + \Lambda^\mu{}_j \Lambda^\nu{}_k \frac{1}{\mu} (\Lambda^{-1})^j{}_\alpha (\Lambda^{-1})^k{}_\beta F^{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

である。ここで、

$$\Lambda^\mu{}_0 = w^\mu \tag{3.5}$$

である[2) 3)]。よって、

$$\begin{aligned} \Lambda^\nu{}_k (\Lambda^{-1})^k{}_\beta &= \delta^\nu_\beta - \Lambda^\nu{}_0 (\Lambda^{-1})^0{}_\beta \\ &= \delta^\nu_\beta + w^\nu w_\beta \end{aligned} \tag{3.6}$$

[2)] $\Lambda^\mu{}_0 = w^\mu$ は次のようにして得る [2]。$x'^\mu = (x'^0, 0)$ は $x^\mu = \Lambda^\mu{}_0 x'^0$ である。また、

$$v^k = \frac{dx^k}{dx^0} = \Lambda^k{}_0 \frac{dx'^0}{dx^0}\,, \quad 1 = \frac{dx^0}{dx^0} = \Lambda^0{}_0 \frac{dx'^0}{dx^0}$$

より、

$$\Lambda^k{}_0 \;=\; v^k / \frac{dx'^0}{dx^0}\,, \quad \Lambda^0{}_0 = 1/\frac{dx'^0}{dx^0}$$

であり、

$$-1 = \eta_{00} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = (-1 + v^2) \Big[\frac{dx'^0}{dx^0}\Big]^{-2}$$

なので、

$$\Big[\frac{dx'^0}{dx^0}\Big]^{-1} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \Lambda^0{}_0\,, \quad \Lambda^k{}_0 = \frac{v^k}{\sqrt{1-v^2}}$$

を得る。

[3)] ローレンツブーストは、

$$\Lambda^\mu{}_0 = w^\mu\,, \quad \Lambda^0{}_k = w^k\,, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} v^i v^j\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

である。

である。ここで、$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu}$ を用いた。これより、

$$\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{k}(\Lambda^{-1})^{0}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{k}{}_{\beta} = w^{\mu}w_{\alpha}(\delta^{\nu}_{\beta} + w^{\nu}w_{\beta}), \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}{}_{j}\Lambda^{\nu}{}_{k}\frac{1}{\mu}(\Lambda^{-1})^{j}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{k}{}_{\beta} &= (\delta^{\mu}_{\alpha} + w^{\mu}w_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + w^{\nu}w_{\beta}) \\ &= \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + w^{\mu}w_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\alpha}w^{\nu}w_{\beta} + w^{\mu}w_{\alpha}w^{\nu}w_{\beta}\end{aligned} \tag{3.8}$$

なので、

$$\begin{aligned}H^{\mu\nu} &= \varepsilon(w^{\nu}w_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta} - w^{\mu}w_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta})F^{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + w^{\mu}w_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\alpha}w^{\nu}w_{\beta})F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{\mu}F^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\mu} - \varepsilon\right)(F_{\rho}{}^{\nu}w^{\rho}w^{\mu} - F_{\rho}{}^{\mu}w^{\rho}w^{\nu})\end{aligned} \tag{3.9}$$

となる。これは (1.10) と一致する。

References

[1] 砂川重信『理論電磁気学』(紀伊國屋書店, 1999 年).

[2] 内山龍雄『相対性理論』(岩波書店, 1977 年).

[3] 藤井保憲『超重力理論入門』(産業図書, 2005 年) の p.119