ディラックの簡便法

中嶋 慧

January 7, 2025

Abstract

ディラックの簡便法が上手く行く理由を考える。

1 ディラックの簡便法

$$L(x, y, \dot{x}, t) = \dot{x}^i c_i(y) - V(x, y, t) \tag{1.1}$$

を考える。x, y, c は n 成分とする。c は時間に依存しても良い。このとき、

$$\begin{aligned} p_i &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \\ &= c_i, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i} = 0 \tag{1.3}$$

である。(1.2) は y^i について解けて、

$$y^i = y^i(p) \tag{1.4}$$

とできるとする。ハミルトニアンを

$$H_0(x, p, t) := V(x, y(p), t) \tag{1.5}$$

とする。x^i と p_i とは正準座標と考える：

$$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j, \quad \{x^i, x^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \tag{1.6}$$

2 拘束系のディラック理論

拘束条件は、

$$\phi_i := p_i - c_i(y) = 0, \tag{2.1}$$

$$\psi_i := \bar{p}_i = 0 \tag{2.2}$$

である。$\bar{p}_i$ は y^i の共役運動量である。ハミルトニアンは、

$$
\begin{aligned}
H(x,y,p,\bar{p},t) &:= \dot{x}^i p_i + \dot{y}^i \bar{p}_i - L \\
&= V(x,y,t)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

である。

いま、

$$
\phi_{n+i} := \psi_i, \tag{2.4}
$$

$$
C_{I,J} := \{\phi_I, \phi_J\} \quad (I,J = 1,2,\cdots,2n) \tag{2.5}
$$

とすると、

$$
C_{i,j} = 0, \quad C_{n+i,n+j} = 0 \tag{2.6}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
C_{i,n+j} &= \{\phi_i, \psi_j\} \\
&= -c_{ij}, \quad c_{ij} := \frac{\partial c_i}{\partial y^j},
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
C_{n+i,j} = -C_{i,n+j} \tag{2.8}
$$

となる。

ディラック括弧は、

$$
\{A,B\}_{\mathrm{D}} := \{A,B\} - \{A,\phi_I\}(C^{-1})^{IJ}\{\phi_J, B\} \tag{2.9}
$$

である。ここで、

$$
(C^{-1})^{i,j} = 0, \quad (C^{-1})^{n+i,n+j} = 0, \tag{2.10}
$$

$$
(C^{-1})^{i,n+j} = (c^{-1})^{ij}, \tag{2.11}
$$

$$
(C^{-1})^{n+i,j} = -(c^{-1})^{ij} \tag{2.12}
$$

である。よって、

$$
\begin{aligned}
\{A,B\}_{\mathrm{D}} &= \{A,B\} - \{A,\phi_k\}(c^{-1})^{kl}\{\psi_l, B\} + \{A,\psi_k\}(c^{-1})^{kl}\{\phi_l, B\} \\
&= \{A,B\} - \{A,\phi_k\}(c^{-1})^{kl}\{\bar{p}_l, B\} + \{A,\bar{p}_k\}(c^{-1})^{kl}\{\phi_l, B\}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

となる。従って、

$$
\{x^i, p_j\}_{\mathrm{D}} = \delta^i_j, \tag{2.14}
$$

$$
\{x^i, y^j\}_{\mathrm{D}} = (c^{-1})^{ij} \tag{2.15}
$$

であり、他は全て 0 である。特に、

$$
\begin{aligned}
\{y^i, \bar{p}_j\}_{\mathrm{D}} &= \delta^i_j - \{y^i,\phi_k\}(c^{-1})^{kl}\{\bar{p}_l, \bar{p}_j\} + \{y^i, \bar{p}_k\}(c^{-1})^{kl}\{\phi_l, \bar{p}_j\} \\
&= \delta^i_j - 0 + \delta^i_k (c^{-1})^{kl}(-c_{lj}) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

である。

3 正準変数

全位相空間の正準変数 Q^I, P_J で、

$$Q^{n+i} = 0 = P_{n+i} \tag{3.1}$$

が拘束条件となっているものを探す。まず、

$$
\begin{aligned}
Q^i &= x^i + A^{ij}(y)\psi_j, &(3.2)\\
P_i &= p_i, &(3.3)\\
Q^{n+i} &= B^{ij}(y)\phi_j, &(3.4)\\
P_{n+i} &= D_i{}^j(y)\psi_j &(3.5)
\end{aligned}
$$

を仮定する [1]。このとき、

$$
\begin{aligned}
\{Q^i, Q^j\} &= \{x^i, A^{ik}(y)\psi_k\} + \{A^{ik}(y)\psi_k, x^j\} + \{A^{ik}(y)\psi_k, A^{jl}(y)\psi_l\}\\
&= 0, &(3.6)\\
\{Q^i, P_i\} &= \delta^i_j + \{A^{ij}(y)\psi_j, p_i\}\\
&= \delta^i_j, &(3.7)\\
\{Q^{n+i}, P_{n+j}\} &= \{B^{ik}(y)\phi_k, D_j{}^l(y)\psi_l\}\\
&= \{B^{ik}(y), D_j{}^l(y)\psi_l\}\phi_k + B^{ik}(y)\{\phi_k, D_j{}^l(y)\psi_l\}\\
&= \frac{\partial B^{ik}(y)}{\partial y^l} D_j{}^l(y)\phi_k + B^{ik}(y)\{\phi_k, D_j{}^l(y)\}\psi_l + B^{ik}(y)D_j{}^l(y)\{\phi_k, \psi_l\}\\
&= \frac{\partial B^{ik}(y)}{\partial y^l} D_j{}^l(y)\phi_k - B^{ik}(y)D_j{}^l(y)c_{kl}(y) &(3.8)
\end{aligned}
$$

である。以下、$B^{ij}(y)$ は y に依存しないとする。このとき、

$$\{Q^{n+i}, P_{n+j}\} = -B^{ik}D_j{}^l(y)c_{kl}(y) = \delta^i_j \tag{3.9}$$

である。いま、

$$\tilde{c}^i{}_l := B^{ik}c_{kl}(y) \tag{3.10}$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
-D_j{}^l(y)\tilde{c}^i{}_l(y) &= \delta^i_j, &(3.11)\\
D_j{}^l &= -(\tilde{c}^{-1})^l{}_j &(3.12)
\end{aligned}
$$

を得る。また、

$$
\begin{aligned}
\{Q^i, Q^{n+j}\} &= B^{jk}\{x^i + A^{ij}(y)\psi_j, \phi_k\}\\
&= B^{jk}(\delta^i_k + A^{ij}(y)\{\psi_j, \phi_k\} + \{A^{ij}(y), \phi_k\}\psi_j)\\
&= B^{jk}[\delta^i_k + A^{ij}(y)c_{jk}(y)] &(3.13)
\end{aligned}
$$

であるから、

$$A^{ij} = -(c^{-1})^{ij} \tag{3.14}$$

となる。よって、

$$Q^i = x^i - (c^{-1})^{ij}\psi_j, \tag{3.15}$$
$$P_i = p_i, \tag{3.16}$$
$$Q^{n+i} = B^{ij}\phi_j, \tag{3.17}$$
$$P_{n+i} = -(\tilde{c}^{-1})^l{}_j\psi_j \tag{3.18}$$

である。

全位相空間のうち、拘束条件を満たす空間を M^* と書く。明らかに Q^i, P_i は M^* の正準変数である。M^* では $\psi_j = 0$ なので、x^i, p_i も M^* の正準変数である。

References

[1] 渡辺悠樹『解析力学』共立出版 (2024) のサポートページ
`https://sites.google.com/view/watanabegroup/AMbook?authuser=0`
の「質問への回答と誤植訂正」(最終更新日:January 7, 2025, 最終更新時間:9:46pm)