オイラーの変分法

中嶋 慧

July 3, 2024

Abstract

オイラーの変分法 (1744 年の本) について解説する。

1　オイラーの 1744 年の本

1.1　第 3 章

2 つの関数 $Z(\Pi, x, y, p, q, \cdots)$, $[Z](x, y, p, q, \cdots)$ を考える。その偏微分を以下のように書く：

$$\delta Z = L\delta\Pi + M\delta x + N\delta y + P\delta q + Q\delta p + \cdots\,, \tag{1.1}$$

$$\delta[Z] = [M]\delta x + [N]\delta y + [P]\delta q + [Q]\delta p + \cdots\,. \tag{1.2}$$

いま、

$$I := \int_0^a dx\ Z\Big(\tilde{\Pi}, x, y(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\Big), \quad \tilde{\Pi} := \int_0^x dx'\ [Z]\Big(x', y(x'), \frac{dy(x')}{dx'}, \frac{d^2y(x')}{dx'^2}, \cdots\Big) \tag{1.3}$$

とし、I の極値を考える。このとき、解くべき方程式は以下となる [2]：

$$(N + \lambda[N]) - \frac{d}{dx}(P + \lambda[P]) + \frac{d^2}{dx^2}(Q + \lambda[Q]) - \cdots = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = -L, \quad \lambda(a) = 0. \tag{1.5}$$

λ は未定乗数と解釈できる。

1.2　第 4 章

更に一般的に、

$$\delta Z = L\delta\Pi + M\delta x + N\delta y + P\delta q + Q\delta p + \cdots\,, \tag{1.6}$$

$$\delta[Z] = [L]\delta\Pi + [M]\delta x + [N]\delta y + [P]\delta q + [Q]\delta p + \cdots \tag{1.7}$$

のとき、

$$I := \int_0^a dx\ Z\Big(\tilde{\Pi}(x), x, y(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\Big), \tag{1.8}$$

$$\frac{d\tilde{\Pi}(x)}{dx} = [Z]\Big(\tilde{\Pi}(x), x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\Big) \tag{1.9}$$

とし、I の極値を考える。解くべき方程式は以下となる [2]：

$$(N + V[N]) - \frac{d}{dx}(P + V[P]) + \frac{d^2}{dx^2}(Q + V[Q]) - \cdots = 0. \tag{1.10}$$

ただし、

$$V = e^{-\int dx\ [L]}\Big(H - \int dx\ e^{\int dx\ [L]} L\Big) \tag{1.11}$$

であり、H は定数である。これは、

$$\frac{dV}{dx} = -[L]V - L \tag{1.12}$$

を満たす。V は未定乗数と解釈できる。

1.3　第 5 章

拘束条件

$$\int_0^a dx\ [Z]\Big(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\Big) = \text{const.} \tag{1.13}$$

のもとで (1.3) の I の極値を求める。解くべき方程式は、

$$(N + \lambda[N]) - \frac{d}{dx}(P + \lambda[P]) + \frac{d^2}{dx^2}(Q + \lambda[Q]) - \cdots = 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = -L \tag{1.15}$$

となる [2]。λ は未定乗数と解釈できる。特に、$L = 0$ のとき、つまり、Z が Π に依らないとき、λ は定数となる。

1.4　付録

$$\int_{x_0}^{x_1} ds = l = \text{const}, \quad \int_{x_0}^{x_1} dy = y_1 - y_0 = \text{const} \tag{1.16}$$

のもとで、

$$I := \int_{x_0}^{x_1} ds\ \kappa^2, \quad \kappa = \frac{q}{(1+p^2)^{3/2}}, \quad p := \frac{dy}{dx}, \quad q := \frac{dp}{dx} \tag{1.17}$$

の I を最小にしたい。ここで、$ds = \sqrt{1+p^2}dx$ である。よって、

$$I = \int_{x_0}^{x_1} dx\ \mathcal{L}\Big(x, p(x), \frac{dp}{dx}\Big), \quad \mathcal{L}(x,p,q) := \frac{q^2}{(1+p^2)^{5/2}} \tag{1.18}$$

である。ラグランジュの未定乗数法を使えば、

$$\begin{aligned} S &:= I - \alpha\Big(\int_{x_0}^{x_1} ds - l\Big) - \beta\Big(\int_{x_0}^{x_1} dy - (y_1 - y_0)\Big) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx\ L\Big(x, p(x), \frac{dp}{dx}\Big) + \text{const}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$L(x,p,q) := \mathcal{L}(x,p,q) - \alpha\sqrt{1+p^2} - \beta p \tag{1.20}$$

とし、S を最小化すれば良い。オイラーは多少の考察の後、

$$N := \frac{\partial L}{\partial q}\frac{dp}{dx} - L \tag{1.21}$$

が

$$\frac{dN}{dx} = 0 \tag{1.22}$$

満たすことを指摘した [3]。これはネーターの定理として理解できる。

ネーターの定理を復習しよう [4]。ラグランジアン $L(t, q, \dot{q})$ に対して、作用

$$S := \int_{t_0}^{t_1} dt\ L\Big(t, q(t), \frac{dq}{dt}\Big) \tag{1.23}$$

を考える。微小座標変換

$$t \to t + \delta t, \quad q(t) \to q(t) + \delta q(t) \tag{1.24}$$

を考えると、

$$S \to S' = S + \delta S, \tag{1.25}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt\ \Big\{\Big(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)\tilde{\delta} q - \frac{d\mathcal{N}}{dt}\Big\}, \tag{1.26}$$

$$\mathcal{N} := -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\tilde{\delta} q - \delta t L, \tag{1.27}$$

$$\tilde{\delta} q := \delta q(t) - \delta t \frac{dq}{dt} \tag{1.28}$$

となり、オイラー・ラグランジェ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{1.29}$$

のもとで、

$$\delta S = \mathcal{N}(t_1) - \mathcal{N}(t_2) \tag{1.30}$$

となる。$\delta S = 0$ ならネーター・チャージ $\mathcal{N}$ は保存する。今の場合、N は、$\delta t = \varepsilon$ を微小定数とし、$\delta q = 0$ とした場合のネーター・チャージに対応する。

References

[1] Leonhard Euler, "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti", 1744 (いわゆる E65. Enestrom Number 65).

[2] H. H. Goldstine, "A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century", Springer, 1981.

[3] 『現代数学 2024 年 7 月号』p.86, 現代数学社.

[4] 高橋康『量子力学を学ぶための解析力学入門 増補第 2 版』講談社, 2000.