隠れた対称性

中嶋 慧

August 11, 2024

Abstract

隠れた対称性について解説する。§1 では一般論を解説し、§2 ではラプラス・ルンゲ・レンツベクトルを導く変換を求める。§3 では N 次元等方調和振動子の隠れた対称性を議論する。§4 では N 次元等方調和振動子の $\mathrm{U}(N)$ 対称性の生成子を議論する。

1 一般論

微小変換

$$t \to t' = t + \delta t, \quad q^i(t) \to q'^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t) \tag{1.1}$$

を考える。このとき、作用

$$S := \int_{t_a}^{t_b} dt\ L(q^i, \dot{q}^i, t) \ \ (\dot{q}^i := \frac{dq^i}{dt}) \tag{1.2}$$

は、

$$S' = \int_{t_a}^{t_b} dt\ \frac{dt'}{dt} L(q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \delta \dot{q}^i, t + \delta t) \tag{1.3}$$

に変換される。このとき、

$$S' - S = \int_{t_a}^{t_b} dt\ \delta L, \tag{1.4}$$

$$\delta L := \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + L\delta t \tag{1.5}$$

である。今、$F(t) \to F'(t') = F(t) + \delta F(t)$ に対して、

$$\bar{\delta} F(t) := F'(t) - F(t) \tag{1.6}$$

と置くと、

$$\delta F(t) = \frac{dF}{dt}\delta t + \bar{\delta} F(t) \tag{1.7}$$

であり、$\bar{\delta}\frac{dF}{dt}=\frac{d\bar{\delta}F}{dt}$ なので、

$$\begin{aligned}\delta\frac{dF}{dt}&=\frac{d^2F}{dt^2}\delta t+\bar{\delta}\frac{dF}{dt}\\&=\frac{d^2F}{dt^2}\delta t+\frac{d\bar{\delta}F}{dt}\end{aligned}\tag{1.8}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\delta L&=\frac{\partial L}{\partial q^i}\Big(\bar{\delta}q^i+\frac{dq^i}{dt}\delta t\Big)+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\Big(\frac{d\bar{\delta}q^i}{dt}+\frac{d^2q^i}{dt^2}\delta t\Big)+\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+L\delta t\\&=\Big(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\Big)\bar{\delta}q^i+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\bar{\delta}q^i+L\delta t\Big)\\&=\Big(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\Big)(\delta q^i-\frac{dq^i}{dt}\delta t)+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i-E_L\delta t\Big)\end{aligned}\tag{1.9}$$

となる。ここで、

$$E_L:=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\frac{dq^i}{dt}-L\tag{1.10}$$

である。

もしも、

$$\delta L=\frac{d\delta\lambda}{dt}\tag{1.11}$$

と書けたとすると、オイラー・ラグランジュ方程式が成り立つとき、

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta q^i-E_L\delta t-\delta\lambda\Big)\approx 0\tag{1.12}$$

となる [1]。ここで、$\approx$ はオイラー・ラグランジュ方程式が使って成り立つことを意味する。

特に、$\varepsilon^r(r=1,2,\cdots,n)$ を微小定数として、

$$\delta q^i=\varepsilon^r F^i_r(q,\dot{q},t),\tag{1.13}$$

$$\delta t=\varepsilon^r T_r(t),\tag{1.14}$$

$$\delta\lambda=\varepsilon^r\Lambda_r(q,\dot{q},t)\tag{1.15}$$

とすると、

$$\frac{d}{dt}Q_r\approx 0,\tag{1.16}$$

$$Q_r:=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}F^i_r(q,\dot{q},t)-E_LT_r(t)-\Lambda_r(q,\dot{q},t)\tag{1.17}$$

である。Q_r をネーターチャージという。特に、F^i_r, Λ_r が $\dot{q}^i$ にも依存する場合を隠れた対称性という[1)]。

よく考えると、(1.11) は

$$\delta L\approx\frac{d\delta\lambda}{dt}\tag{1.18}$$

でも良い。この場合をタイプ B と呼ぶ。(1.11) の場合をタイプ A と呼ぶ。

[1)] δt は $q^i(t)$, $\dot{q}^i(t)$ に依存しても良いのか？δt が t のみの関数としても困ることはあまりない。以下の例では $\delta t=0$ である。

2　ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル

d 次元空間を考え、r を $\boldsymbol{x}$ のノルムとする。ラグランジアンが、

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{\kappa}{r} \tag{2.1}$$

のとき、ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル

$$\boldsymbol{R} := m(\boldsymbol{x}(\dot{\boldsymbol{x}}^2) - \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})) - \kappa\frac{\boldsymbol{x}}{r} \tag{2.2}$$

が保存する：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{R} \approx 0. \tag{2.3}$$

このとき、ネーターチャージがラプラス・ルンゲ・レンツベクトルとなる変換

$$\delta x_i = \varepsilon^j F_{ji}, \quad \delta t = 0 \tag{2.4}$$

を考える。文献 [2] に依ると、

$$F^B_{ji} = x_j\dot{x}_i - \delta_{ij}(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}), \tag{2.5}$$

$$\Lambda^B_j = \kappa\frac{x_j}{r} \tag{2.6}$$

はタイプ B である。文献 [3] に依ると、

$$F^A_{ji} = 2x_j\dot{x}_i - \delta_{ij}(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}) - \dot{x}_j x_i, \tag{2.7}$$

$$\Lambda^A_j = \kappa\frac{x_j}{r} + m(x_j(\dot{\boldsymbol{x}}^2) - \dot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})) \tag{2.8}$$

はタイプ A である。

これらを確かめる。まず、

$$Q_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}F_{ji} - \Lambda_j = R_j = m(x_j(\dot{\boldsymbol{x}}^2) - \dot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})) - \kappa\frac{x_j}{r} \tag{2.9}$$

より、

$$\Lambda_j - \kappa\frac{x_j}{r} = m[\dot{x}_i F_{ji} - (x_j(\dot{\boldsymbol{x}}^2) - \dot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}))] \tag{2.10}$$

を得る。今、

$$F_{ji} = F^B_{ji} + G_{ji} \tag{2.11}$$

とすると、(2.10) より、

$$\Lambda_j = \kappa\frac{x_j}{r} + m\dot{x}_i G_{ji} \tag{2.12}$$

となる。G_{ji} として、

$$G_{ji} = a x_j\dot{x}_i + b\dot{x}_j x_i + c\delta_{ij}(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}) \tag{2.13}$$

を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
\Lambda_j &= \kappa \frac{x_j}{r} + m\dot{x}_i[a x_j \dot{x}_i + b\dot{x}_j x_i + c\delta_{ij}(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})] \\
&= \kappa \frac{x_j}{r} + m[a x_j(\dot{\boldsymbol{x}}^2) + (b+c)\dot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})]
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Lambda_j &= \kappa\Big[\frac{\dot{x}_j}{r} - x_j\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})}{r^3}\Big] + m\dot{x}_i\dot{G}_{ji} + m\ddot{x}_i G_{ji} \\
&= \kappa\Big[\frac{\dot{x}_j}{r} - x_j\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})}{r^3}\Big] + m\dot{x}_i\dot{G}_{ji} + m[a x_j(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}) + b\dot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}) + c\ddot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})]
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

である。一方、

$$
\begin{aligned}
\delta L &= \varepsilon_j\Big[F_{ji}\frac{\partial L}{\partial x_i} + \dot{F}_{ji}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\Big] \\
&= \varepsilon_j\Big[-\kappa G_{ji}\frac{x_i}{r} + m\dot{x}_i F^B_{ji} + m\dot{x}_i\dot{G}_{ji}\Big] \\
&= \varepsilon_j\Big[-\kappa\frac{(a+c)x_j(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}) + b\dot{x}_j r^2}{r^3} + m[x_j(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}) - \dot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}})] + m\dot{x}_i\dot{G}_{ji}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

である。よって、$(a,b,c)=(1,-1,0)$ であれば、オイラー・ラグランジュ方程式を使わずに、

$$
\delta L = \varepsilon_j \frac{d}{dt}\Lambda_j \tag{2.17}
$$

である。この場合、(2.7), (2.8) を得る。一方、$G_{ji}=0$ のとき、

$$
\delta L = \varepsilon_j m[x_j(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}) - \dot{x}_j(\boldsymbol{x}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}})] \approx \varepsilon_j\kappa\Big[\frac{\dot{x}_j}{r} - x_j\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})}{r^3}\Big] = \varepsilon_j\frac{d}{dt}\Lambda_j \tag{2.18}
$$

である。この場合、(2.5), (2.6) を得る。

3 N 次元等方調和振動子

N 次元等方調和振動子

$$
L = \sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\Big(\dot{q}_i^2 - \omega^2 q_i^2\Big) \tag{3.1}
$$

において、微小座標変換

$$
\delta t = 0, \quad \delta q_k = \varepsilon_{ij}F_{ijk}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \tag{3.2}
$$

$$
F_{ijk} := \frac{1}{2}(\dot{q}_i\delta_{jk} + \dot{q}_j\delta_{ik}) \tag{3.3}
$$

を考える。このとき、

$$\begin{aligned}
\delta L &= \varepsilon_{ij}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_k}F_{ijk} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{dF_{ijk}}{dt}\Big) \\
&= \varepsilon_{ij}\frac{m}{2}\Big(-\omega^2(q_i\dot{q}_j + q_j\dot{q}_i) + (\dot{q}_i\ddot{q}_j + \dot{q}_j\ddot{q}_i)\Big) && (3.4) \\
&= \varepsilon_{ij}\frac{d}{dt}\Lambda^A_{ij}, && (3.5) \\
\Lambda^A_{ij} &= \frac{m}{2}(-\omega^2 q_iq_j + \dot{q}_i\dot{q}_j) && (3.6)
\end{aligned}$$

である。ネーターチャージは、

$$\begin{aligned}
Q^A_{ij} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}F_{ijk} - \Lambda^A_{ij} \\
&= m\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{m}{2}(-\omega^2 q_iq_j + \dot{q}_i\dot{q}_j) \\
&= \frac{m}{2}(\dot{q}_i\dot{q}_j + \omega^2 q_iq_j)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

である。Q^A_{ii} は i 番目の振動子のエネルギーである。非対角成分の保存は幾何学的対称性には由来しない。

一方、(3.4) より、

$$\begin{aligned}
\delta L &\approx \varepsilon_{ij}\frac{m}{2}\Big(-\omega^2(q_i\dot{q}_j + q_j\dot{q}_i) - \omega^2(\dot{q}_iq_j + \dot{q}_jq_i)\Big) \\
&= \varepsilon_{ij}m[-\omega^2(q_i\dot{q}_j + q_j\dot{q}_i)] \\
&= \varepsilon_{ij}\frac{d}{dt}\Lambda^B_{ij}, && (3.8) \\
\Lambda^B_{ij} &= -m\omega^2 q_iq_j && (3.9)
\end{aligned}$$

であり [2]、ネーターチャージは、

$$\begin{aligned}
Q^B_{ij} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}F_{ijk} - \Lambda^B_{ij} \\
&= m(\dot{q}_i\dot{q}_j + \omega^2 q_iq_j) = 2Q^A_{ij} && (3.10)
\end{aligned}$$

である。

以下、$N = 2$ とし、$x = q_1, y = q_2$ と書く。微小座標変換

$$\delta x = \varepsilon\dot{x}, \quad \delta y = -\varepsilon\dot{y} \tag{3.11}$$

を考える。これは、

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0 \tag{3.12}$$

の場合なので、

$$Q'_A = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 - y^2) \tag{3.13}$$

が保存する [3]。また、別の微小座標変換

$$\delta x = \varepsilon \dot{y}, \quad \delta y = \varepsilon \dot{x} \tag{3.14}$$

を考える。これは、

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon \tag{3.15}$$

の場合なので、

$$Q''_A = m\dot{x}\dot{y} + m\omega^2 xy \tag{3.16}$$

が保存する。Q'_A, Q''_A はそれぞれ、ラグランジアンが、

$$L' = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 - y^2), \tag{3.17}$$

$$L'' = m\dot{x}\dot{y} - m\omega^2 xy \tag{3.18}$$

の場合のエネルギーである [3]。上の 2 つのラグランジアンから導かれる運動方程式は、L から導かれるものと一致する。

4　N 次元等方調和振動子：SU(N) 対称性

N 次元等方調和振動子のハミルトニアンは、

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right) \tag{4.1}$$

である。ここで、

$$a_k := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{m\omega} q_k + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} p_k), \tag{4.2}$$

$$a_k^* := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{m\omega} q_k - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} p_k) \tag{4.3}$$

と置くと、

$$H = \omega \sum_{i=1}^{N} a_i^* a_i \tag{4.4}$$

となる。a_k^* は a_k の複素共役である。今、$U = (U_{ij})$ を $\mathrm{U}(N)$ の元 (N 次元ユニタリー行列) とし、

$$A_i = U_{ij} a_j \tag{4.5}$$

とすると、

$$H = \omega \sum_{i=1}^{N} A_i^* A_i \tag{4.6}$$

である。すなわち、調和振動子は U(N) 対称性を持つ。
　U(N) の元は、

$$U = e^{-i\theta_0} \exp\Big(-i \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \theta_\alpha \boldsymbol{G}_\alpha \Big) \tag{4.7}$$

と書ける。$\boldsymbol{G}_r$ はエルミート行列で、SU(N) の生成子である。微小変換では、

$$U = 1_N - i\Big(\theta_0 1_N + \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \theta_\alpha \boldsymbol{G}_\alpha\Big) \tag{4.8}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \delta a_k &:= A_k - a_k \\ &= -i\Big(\theta_0 a_k + \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \sum_{j=1}^{N} \theta_\alpha (\boldsymbol{G}_\alpha)_{kj} a_j\Big) \end{aligned} \tag{4.9}$$

である。同様に、

$$\delta a_k^* = i\Big(\theta_0 a_k^* + \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \sum_{j=1}^{N} \theta_\alpha a_j^* (\boldsymbol{G}_\alpha)_{jk}\Big) \tag{4.10}$$

である。変換の生成子は、

$$G = \theta_0 G_0 + \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \theta_\alpha G_\alpha, \tag{4.11}$$

$$G_0 = \sum_{k=1}^{N} a_k^* a_k, \tag{4.12}$$

$$G_\alpha = \sum_{k,j=1}^{N} a_k^* (\boldsymbol{G}_\alpha)_{kj} a_j \tag{4.13}$$

である。G_0 はハミルトニアンを ω で割ったものである。
　G_α を Q_{ij}^A や角運動量

$$L_{ij} = \frac{m}{2}(q_i \dot{q}_j - q_j \dot{q}_i) \tag{4.14}$$

で表す。まず、

$$L_{jk} = \frac{1}{2}(q_j p_k - q_k p_j), \tag{4.15}$$

$$Q_{jk}^A = \frac{1}{2}(\frac{1}{m} p_j p_k + m\omega^2 q_j q_k) \tag{4.16}$$

であり、

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(a_k + a_k^*), \tag{4.17}$$

$$p_k = \frac{\sqrt{m\omega}}{i\sqrt{2}}(a_k - a_k^*) \tag{4.18}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
L_{jk} &= \frac{1}{4i}[(a_j + a_j^*)(a_k - a_k^*) - (a_k + a_k^*)(a_j - a_j^*)] \\
&= \frac{a_j^* a_k - a_k^* a_j}{2i}
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
Q_{jk}^A &= \frac{\omega}{4}\Big[- (a_j - a_j^*)(a_k - a_k^*) + (a_j + a_j^*)(a_k + a_k^*)\Big] \\
&= \frac{\omega}{2}(a_j^* a_k + a_k^* a_j)
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

である。従って、

$$
a_j^* a_k = \frac{iL_{jk} + Q_{jk}^A/\omega}{2} \tag{4.21}
$$

なので、

$$
G_\alpha = \sum_{j,k=1}^{N} (\boldsymbol{G}_\alpha)_{jk} \frac{iL_{jk} + Q_{jk}^A/\omega}{2} \tag{4.22}
$$

を得る。

References

[1] 中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』現代数学社, 2020 年.

[2] 山本 義隆, 中村 孔一 『解析力学 I』朝倉書店, 1998 年.

[3] 渡辺 悠樹『解析力学：基礎の基礎から発展的なトピックまで』共立出版, 2024 年.