リー群の任意の元は exp(リー代数の元) とかけるか？

中嶋 慧

December 5, 2021

Abstract

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の元 $g(t)=\mathrm{diag}(-e^t,-e^{-t})$ $(t\neq 0)$ は e^X $(X\in \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))$ の形では書けないことを示す。

Contents

1 はじめに

物理では、リー群 G の元 g は、

$$g=e^X,\quad X\in\mathfrak{g} \tag{1.1}$$

の形で書けると仮定されることが多い。$\mathfrak{g}$ は G のリー代数である。実際、G がコンパクトで連結なら上の仮定は正しい ($\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ は連結なコンパクト群である)[1]。しかし、[1] によると、

$$g(t)=\mathrm{diag}(-e^t,-e^{-t})\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\ (t\neq 0)\ \text{は}\ e^X\ (X\in \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}))\ \text{の形では書けない。} \tag{1.2}$$

§3 でこれ示す。§2 はそのための準備である。

また、狭義ローレンツ群 $\mathrm{SO}_+(3,1)$ は非コンパクトなので、同様に e^X $(X\in \mathrm{so}(3,1))$ の形では書けない元がありそうである[1)]。ところで、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は $\mathrm{SO}_+(3,1)$ の 2 重被覆群であり、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

[1)] まず、

$$\mathrm{O}(p,q)\ :=\ \{(\Lambda^a{}_b)\in \mathrm{M}(p+q,\mathbb{R})|\Lambda^i{}_a\eta^{(q,p)}_{ij}\Lambda^j{}_b=\eta^{(q,p)}_{ab}\}$$

である。ただし、$\eta^{(q,p)}_{ab}$ は $(q+p)$ 次の対角行列で、その最初の q 成分が -1 で、残りの p 成分が 1 である。$d\geq 1$

から $\mathrm{SO}_+(3,1)$ への 2 対 1 写像 ρ が存在する (§ 4)。上の $g(t)$ は e^X $(X \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ と書けないが、$\rho(g(t))$ は e^Y $(Y \in \mathrm{so}(3,1))$ と書けることを § 4 で示す。

追記：この記事を公開後に教えて頂いた文献 [2] によると、$\mathrm{SO}_+(3,1)$ の任意の元は e^Y $(Y \in \mathrm{so}(3,1))$ と書ける。

2 準備：任意の 2 次行列の指数関数

いま、X を任意の 2×2 行列とし、

$$x \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}(X) \tag{2.1}$$

とする。このとき、

$$e^X = e^{x/2}\left[\cosh\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \det(X)} + \left(X - \frac{x}{2}\right)\mathrm{sinc}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \det(X)}\right] \tag{2.2}$$

であることを示す。ここで、$\mathrm{sinc}(z) = (\sinh z)/z$ である。

まず、

$$Y \overset{\text{def}}{=} X - \frac{x}{2} \tag{2.3}$$

とする。ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$Y^2 = -\det(Y) = -\left[\det(X) - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] \tag{2.4}$$

であるから、

$$e^Y = \cosh\sqrt{-\det(Y)} + Y\mathrm{sinc}\sqrt{-\det(Y)} \tag{2.5}$$

よって、

$$e^X = e^{x/2}[\cosh\sqrt{-\det(Y)} + Y\mathrm{sinc}\sqrt{-\det(Y)}] \tag{2.6}$$

であり、これは (2.2) である。

3 $\mathrm{diag}(-e^t, -e^{-t})$ は $\exp[\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ の元$]$ とは書けない

$$g(t) = \begin{pmatrix} -e^t & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix} = \exp X \tag{3.1}$$

に対して、$\mathrm{O}(d,1)$ をローレンツ群と呼ぶ。また、

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(p,q) &:= \Lambda \in \mathrm{O}(p,q) | \det(\Lambda) = 1\}, \\ \mathrm{SO}_+(d,1) &:= \{(\Lambda^a{}_b) \in \mathrm{SO}(d,1) | \Lambda^0{}_0 > 0\} \end{aligned}$$

である。

と置くと、$X \notin \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ であることを示す。まず、

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

と置くと、(2.2) より、$b = 0 = c$ を得る。再び (2.2) より、

$$\exp\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} = e^A \begin{pmatrix} e^B & 0 \\ 0 & e^{-B} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

なので、

$$e^A = -1\,, \quad e^B = e^t \tag{3.4}$$

を得る。よって、

$$X = t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\pi \begin{pmatrix} 2n+1 & 0 \\ 0 & 2m+1 \end{pmatrix} \quad (n, m \in \mathbb{Z}) \tag{3.5}$$

である。$\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ の元は、

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}) \tag{3.6}$$

の形なので、$X \notin \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ である ($X \notin \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ でもある)。よって (1.2) が示された。

4 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ から $\mathrm{SO}_+(3,1)$ への 2 対 1 写像

2 次のエルミート行列は、

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^1 & x^2 - ix^3 \\ x^2 + ix^3 & x^0 - x^1 \end{pmatrix} =: (x^\mu) \quad (x^\mu \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

と書け、$P \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して、

$$X' := PXP^\dagger \tag{4.2}$$

もエルミート行列である。また、

$$\det(X') = \det(X) = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] \tag{4.3}$$

である。いま、

$$X' = (x'^\mu)\,, \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\mu{}_\nu\,, \quad \Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \rho(P) \tag{4.4}$$

とすると、$\Lambda \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ であり、ρ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ から $\mathrm{SO}_+(3,1)$ への 2 対 1 の全射準同型である。

さて、上の $g(t)$ は e^X $(X \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$ と書けない。なので、$\mathrm{SO}_+(3,1)$ にも exp で書けない元が存在してもおかしくない。試しに $\rho(g(t))$ を考えると、これは e^Y $(Y \in \mathrm{so}(3,1))$ と書ける：

$$\rho(g(t)) = \begin{pmatrix} \cosh(2t) & \sinh(2t) & 0 & 0 \\ \sinh(2t) & \cosh(2t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^Y, \tag{4.5}$$

$$Y = 2t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{so}(3,1). \tag{4.6}$$

$\rho(g(t))$ はローレンツ・ブーストである。$\rho(g(t)) = \rho(-g(t))$ である。

追記：この記事を公開後に教えて頂いた文献 [2] によると、$\mathrm{SO}_+(3,1)$ の任意の元は e^Y $(Y \in \mathrm{so}(3,1))$ と書ける。

References

[1] 佐藤 光『群と物理』(丸善出版, 2016).

[2] Jean Gallier, “Notes on Differential Geometry and Lie Groups”
`https://www.cis.upenn.edu/~cis610/diffgeom-n.pdf`