確率微分方程式の弱近似

中嶋 慧

January 15, 2024

Abstract

本記事では確率微分方程式の 2 次の弱近似である Platen 法を解説する。確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \tag{0.1}$$

を以下のように数値的に解く方法が Platen 法である：

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{2}(a(\tilde{Y}_n) + a(Y_n))\Delta t \\
&\quad + \frac{1}{4}[b(Y_n^+) + b(Y_n^-) + 2b(Y_n)]\Delta W_n \\
&\quad + \frac{1}{4}[b(Y_n^+) - b(Y_n^-)][(\Delta W_n)^2 - \Delta t](\Delta t)^{-1/2}, &(0.2)\\
\tilde{Y}_n &:= Y_n + a(Y_n)\Delta t + b(Y_n)\Delta W_n, &(0.3)\\
Y_n^{\pm} &:= Y_n + a(Y_n)\Delta t \pm b(Y_n)\sqrt{\Delta t}. &(0.4)
\end{aligned}$$

ΔW_n はガウス分布 $N(0, \Delta t)$ に従って独立に選ぶ。このとき、$g(x) \in C_P^6$ に対して、

$$|E\big(g(Y_N)\big) - E\big(g(X_{\Delta N})\big)| = O((\Delta t)^2) \tag{0.5}$$

である。ここで、C_P^n の元 g は n 階連続微分可能であり、g とその導関数が高々多項式的に増加する。

Contents

文献 [1] を参考に Platen 法を解説する。

1　伊藤テーラー展開

$X_t = (X_t^1, \cdots, X_t^d)$ が確率微分方程式

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{m} b^{k,j}(t, X_t)dW_t^j \quad (k = 1, \cdots, d) \tag{1.1}$$

に従うとする。W_t^j は Wiener 過程である。このとき、伊藤公式は以下で与えられる：

$$f(\tau, X_\tau) = f(\rho, X_\rho) + \int_\rho^\tau dt\ L^0 f(t, X_t) + \sum_{j=1}^{m} \int_\rho^\tau dt\ L^j f(t, X_t) dW_t^j, \tag{1.2}$$

$$L^0 := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{d} a^k \frac{\partial}{\partial X^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} b^{k,j} b^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial X^k \partial X^l}, \tag{1.3}$$

$$L^j := \sum_{k=1}^{d} b^{k,j} \frac{\partial}{\partial X^k}. \tag{1.4}$$

以下では次の公式を解説する：

伊藤テーラー展開

$$f(\tau, X_\tau) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha[f_\alpha(\rho, X_\rho)]_{\rho,\tau} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha[f_\alpha(\bullet, X_\bullet)]_{\rho,\tau}. \tag{1.5}$$

1.1　多重インデックスと多重伊藤積分

$$\alpha = (j_1, j_2, \cdots, j_l) \quad (j_i = 0, 1, \cdots, m) \tag{1.6}$$

を多重インデックスという。その長さを

$$l(\alpha) := l \tag{1.7}$$

とする。v を長さ 0 の多重インデックスとする：$l(v) := 0$. 全ての多重インデックスの集合を $\mathcal{M}$ とする。$l(\alpha) \geq 0$ の $\alpha \in \mathcal{M}$ に対して、最初のインデックスを除いたものを $-\alpha$, 最後のインデックスを除いたものを $\alpha-$ とする。例えば、

$$-(1) = v = (1)-,$$
$$-(1,0) = (0), \quad (1,0)- = (1)$$
$$-(0,1,2) = (1,2), \quad (0,1,2)- = (0,1)$$

である。2つの多重インデックス $\alpha=(j_1,j_2,\cdots,j_k)$ と $\alpha'=(j'_1,j'_2,\cdots,j'_l)$ に対して、

$$\alpha*\alpha':=(j_1,j_2,\cdots,j_k,j'_1,j'_2,\cdots,j'_l) \tag{1.8}$$

とする。

多重伊藤積分を定義する。v に対して、

$$I_v[f(\bullet,X_\bullet)]_{\rho,\tau}:=f(\tau), \tag{1.9}$$
$$I_v[f(t,X_t)]_{\rho,\tau}:=f(t) \tag{1.10}$$

とし、$\alpha=(j_1,j_2,\cdots,j_l)$, $l\geq 1$ に対して、

$$I_\alpha[f(\bullet,X_\bullet)]_{\rho,\tau}:=\int_\rho^\tau dW_s^{j_l}\ I_{\alpha-}[f(\bullet,X_\bullet)]_{\rho,s}, \tag{1.11}$$
$$I_\alpha[f(t,X_t)]_{\rho,\tau}:=\int_\rho^\tau dW_s^{j_l}\ I_{\alpha-}[f(t,X_t)]_{\rho,s} \tag{1.12}$$

とする。ただし、

$$dW_s^0:=ds \tag{1.13}$$

とする。例えば、

$$I_{(0,2,1)}[f(\bullet,X_\bullet)]_{\rho,\tau}=\int_\rho^\tau dW_{s_3}^1\int_\rho^{s_3}dW_{s_2}^2\int_\rho^{s_2}ds_1\ f(s_1), \tag{1.14}$$
$$I_{(0,2,1)}[f(t,X_t)]_{\rho,\tau}=f(t,X_t)I_{(0,2,1)}, \tag{1.15}$$
$$I_{(0,2,1)}=\int_\rho^\tau dW_{s_3}^1\int_\rho^{s_3}dW_{s_2}^2\int_\rho^{s_2}ds_1 \tag{1.16}$$

である。一般に、

$$I_\alpha:=I_\alpha[1]_{\rho,\tau} \tag{1.17}$$

とする。伊藤公式 (1.2) は、

$$\begin{aligned}f(\tau,X_\tau)&=f(\rho,X_\rho)+\sum_{j=1}^m I_{(j)}[L^jf(\bullet,X_\bullet)]_{\rho,\tau}\\&=I_v[f_v(\rho,X_\rho)]_{\rho,\tau}+\sum_{j=1}^m I_{(j)}[f_{(j)}(\bullet,X_\bullet)]_{\rho,\tau}\end{aligned} \tag{1.18}$$

と書ける。ここで、$\alpha=(j_1,j_2,\cdots,j_l)$, $l\geq 1$ に対して、

$$f_\alpha:=L^{j_1}f_{-\alpha} \tag{1.19}$$

であり、

$$f_v:=f \tag{1.20}$$

である。

$\alpha, \alpha' \in \mathcal{M}$ の対して、以下の公式が成り立つ：

$$I_\alpha[f_{\alpha'}(\bullet, X_\bullet)]_{\rho,\tau} = I_\alpha[f_{\alpha'}(\rho, X_\rho)]_{\rho,\tau} + \sum_{j=0}^{m} I_{(j)*\alpha}[f_{(j)*\alpha'}(\bullet, X_\bullet)]_{\rho.\tau}. \tag{1.21}$$

(1.18), (1.21) より (1.5) が従う。ただし、$\mathcal{A}$ は $\mathcal{M}$ の (空でない) 部分集合であり、

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} l(\alpha) < \infty, \tag{1.22}$$

$$-\alpha \in \mathcal{A} \ \ \mathrm{for}^\forall \alpha \in \mathcal{A}\backslash\{v\} \tag{1.23}$$

である。また、

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) := \{\alpha \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{A} | -\alpha \in \mathcal{A}\} \tag{1.24}$$

である。特に $\mathcal{A}$ として、

$$\Gamma_\beta := \{\alpha \in \mathcal{M} | l(\alpha) \leq \beta\} \tag{1.25}$$

が取れる。

なお、$f(t, X) = X^k$ に対して、

$$f_{(0)} = a^k, \tag{1.26}$$

$$f_{(j)} = b^{k,j}, \tag{1.27}$$

$$f_{(0,0)} = L^0 a^k, \tag{1.28}$$

$$f_{(0,j)} = L^0 b^{k,j}, \tag{1.29}$$

$$f_{(j,0)} = L^j a^k, \tag{1.30}$$

$$f_{(j_1,j_2)} = L^{j_1} b^{k,j_2} \tag{1.31}$$

であるから、$\mathcal{A} = \Gamma_2$ に対する (1.5) より、

$$\begin{aligned} X_\tau^k = X_\rho^k &+ a^k I_{(0)} + \sum_{j=1}^{m} b^{k,j} I_{(j)} + L^0 a^k I_{(0,0)} \\ &+ \sum_{j=1}^{m} L^0 b^{k,j} I_{(0,j)} + \sum_{j=1}^{m} L^j a^k I_{(j,0)} + \sum_{j_1,j_2=1}^{m} L^{j_1} b^{k,j_2} I_{(j_1,j_2)} \\ &+ R \end{aligned} \tag{1.32}$$

となる。ここで、

$$R = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\Gamma_2)} I_\alpha[f_\alpha(\bullet, X_\bullet)]_{\rho,\tau} \tag{1.33}$$

は補正項である。特に、

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + b^k(t, X_t)dW_t \tag{1.34}$$

に対しては、

$$
\begin{aligned}
X_\tau^k = X_\rho^k + a^k I_{(0)} + b^k I_{(1)} + \Big(\partial_t a^k + \sum_l a^l \partial_l a^k + \frac{1}{2}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m a^k\Big) I_{(0,0)} \\
+ \Big(\partial_t b^k + \sum_l a^l \partial_l b^k + \frac{1}{2}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m b^k\Big) I_{(0,1)} + \sum_l b^l \partial_l a^k I_{(1,0)} + \sum_l b^l \partial_l b^k I_{(1,1)} + R
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

となる。

2　モーメント条件

$$
E(I_{\alpha_1}\cdots I_{\alpha_l}) := E\Big(\prod_{k=1}^{l} I_{\alpha_k}\Big|\mathcal{A}_\rho\Big), \quad \Delta := \tau - \rho \tag{2.1}
$$

と置く (ここで $\mathcal{A}_\rho$ は時刻 ρ までの確率過程である)。このとき、

$$
E(I_{(j)}) = 0, \tag{2.2}
$$

$$
E(I_{(0)}) = \Delta, \tag{2.3}
$$

$$
E(I_{(0,0)}) = \frac{1}{2}\Delta^2, \tag{2.4}
$$

$$
E(I_{(j_1)} I_{(j_2)}) = \Delta \delta_{j_1 j_2}, \tag{2.5}
$$

$$
E(I_{(j_1)} I_{(0,j_2)}) = \frac{1}{2}\Delta^2 \delta_{j_1 j_2} = E(I_{(j_1)} I_{(j_2,0)}) \tag{2.6}
$$

などである。α の中の 0 の数を $l_0(\alpha)$ とし、$l_>(\alpha) := l(\alpha) - l_0(\alpha)$ とすると、

$$
E(I_{\alpha_1}\cdots I_{\alpha_l}) = O(\Delta^\kappa), \quad \kappa = \sum_{k=1}^{l}[\frac{1}{2}l_>(\alpha_k) + l_0(\alpha_k)] \tag{2.7}
$$

である。

さて、確率変数 $\hat{I}_\alpha$ を導入し、

モーメント条件

$$
E(I_{\alpha_1}\cdots I_{\alpha_l}) - E(\hat{I}_{\alpha_1}\cdots \hat{I}_{\alpha_l}) = O(\Delta^{\beta+1}) \quad (l = 1, \cdots, 2\beta+1) \tag{2.8}
$$

を $\alpha_k \in \Gamma_\beta \backslash \{v\}$ に付いて課す。これをモーメント条件という。

定理 1

$$U_\beta^k(\tau) := \sum_{\alpha\in\Gamma_\beta} f_\alpha^k(\rho, X_\rho)\hat{I}_\alpha, \quad f^k(t,X) := X^k \tag{2.9}$$

とする。任意の $a^k, b^{k,j} \in C_P^{2(\beta+1)}$ であり、どちらも高々線形的に増加し、モーメント条件が成り立つとき、任意の $g \in C_P^{2(\beta+1)}$ に対して、

$$E\big(g(X_\tau) - g(U_\beta(\tau))|\mathcal{A}_\rho\big) = O(\Delta^{\beta+1}) \tag{2.10}$$

である。ここで、C_P^n の元 g(ただし、$g(X) \in \mathbb{R}$) は n 階連続微分可能であり、g とその導関数が高々多項式的に増加する。また、X_t は時刻 ρ で X_ρ からスタートとしたときの確率微分方程式の解である (これを X_t^{ρ,X_ρ} とも書く)。

$\beta = 2$ に対して、以下のようにするとモーメント条件が成立する：

$$\hat{I}_{(j)} = \Delta\hat{W}^j, \tag{2.11}$$

$$\hat{I}_{(0,j)} = \Delta\hat{W}^j\Delta = \hat{I}_{(j,0)}, \tag{2.12}$$

$$\hat{I}_{(j_1,j_2)} = \frac{1}{2}(\Delta\hat{W}^{j_1}\Delta\hat{W}^{j_2} + V_{j_1j_2}). \tag{2.13}$$

ここで $\Delta\hat{W}^j$ は独立にガウス分布 $N(0,\Delta)$ から選ぶ。$V_{j_1j_2}$ は 2 値のランダム変数で、

$$P(V_{j_1j_2} = \pm\Delta) = \frac{1}{2} \quad (j_2 = 1, \cdots, j_1 - 1), \tag{2.14}$$

$$V_{jj} = -\Delta, \tag{2.15}$$

$$V_{j_2j_1} = -V_{j_1j_2} \quad (j_2 = j_1 + 1, \cdots, m) \tag{2.16}$$

である。

これを (1.32), (1.35) に代入して、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k\Delta + \sum_{j=1}^m b^{k,j}\Delta W^j + \frac{1}{2}L^0a^k\Delta^2 \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m (L^0b^{k,j} + L^ja^k)\Delta W\Delta \\ + \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2=1}^m L^{j_1}b^{k,j_2}\Big((\Delta W^{j_1}\Delta W^{j_2} + V_{j_1j_2}\Big) \end{aligned} \tag{2.17}$$

および、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k = Y_n^k + a^k\Delta + b^k\Delta W + \frac{1}{2}\Big(\partial_t a^k + \sum_l a^l\partial_l a^k + \frac{1}{2}\sum_{l,m} b^lb^m\partial_l\partial_m a^k\Big)\Delta^2 \\ + \frac{1}{2}\Big(\partial_t b^k + \sum_l a^l\partial_l b^k + \frac{1}{2}\sum_{l,m} b^lb^m\partial_l\partial_m b^k + \sum_l b^l\partial_l a^k\Big)\Delta W\Delta \\ + \sum_l b^l\partial_l b^k[(\Delta W)^2 - \Delta] \end{aligned} \tag{2.18}$$

を得る。ただし、時間を間隔 Δ で離散化した。

3 Platen法

確率微分方程式

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + b^k(t, X_t)dW_t \tag{3.1}$$

に対して、

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^k = Y_n^k &+ \frac{1}{2}(a^k(t_{n+1}, \tilde{Y}_n) + a^k(t_n, Y_n))\Delta \\
&+ \frac{1}{4}[b^k(t_{n+1}, Y_n^+) + b^k(t_{n+1}, Y_n^-) + 2b^k(t_n, Y_n)]\Delta W_n \\
&+ \frac{1}{4}[b^k(t_n, Y_n^+) - b^k(t_n, Y_n^-)][(\Delta W_n)^2 - \Delta]\Delta^{-1/2},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\tilde{Y}_n^k := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta + b^k(t_n, Y_n)\Delta W_n, \tag{3.3}$$

$$Y_n^{\pm,k} := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta \pm b(t_n, Y_n)\sqrt{\Delta} \tag{3.4}$$

とする。これを Platen 法という。(3.2) を

$$Y_{n+1}^k = Y_n^k + \gamma_n^k + \varepsilon_n^k + \theta_n^k, \tag{3.5}$$

$$\gamma_n^k := \frac{1}{2}(a^k(t_{n+1}, \tilde{Y}_n) + a^k(t_n, Y_n))\Delta, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon_n^k := \frac{1}{4}[b^k(t_{n+1}, Y_n^+) + b^k(t_{n+1}, Y_n^-) + 2b^k(t_n, Y_n)]\Delta W_n, \tag{3.7}$$

$$\theta_n^k := \frac{1}{4}[b^k(t_n, Y_n^+) - b^k(t_n, Y_n^-)][(\Delta W_n)^2 - \Delta]\Delta^{-1/2} \tag{3.8}$$

と置く。このとき、

$$\begin{aligned}
\gamma_n^k = a^k\Delta &+ \frac{1}{2}\partial_t a^k \Delta^2 + \frac{1}{2}\sum_l a^l \partial_l a^k \Delta^2 + \frac{1}{2}\sum_l b^l \partial_l a^k \Delta W_n \Delta \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m a^k (\Delta W_n)^2 \Delta + \delta\gamma_n^k,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^k = b^k \Delta W_n &+ \frac{1}{2}\partial_t b^k \Delta W_n \Delta + \frac{1}{2} a^l \partial_l b^k \Delta W_n \Delta \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m b^k \Delta W_n \Delta + \delta\varepsilon_n^k,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\theta_n^k = \frac{1}{2}\sum_l b^l \partial_l b^k [(\Delta W_n)^2 - \Delta] + \delta\theta_n^k \tag{3.11}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^k = Y_n^k &+ a^k\Delta + b^k \Delta W_n + \frac{1}{2}\Big(\partial_t a^k + \sum_l a^l \partial_l a^k\Big)\Delta^2 + \frac{1}{4}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m a^k (\Delta W_n)^2 \Delta \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\partial_t b^k + \sum_l a^l \partial_l b^k + \frac{1}{2}\sum_{l,m} b^l b^m \partial_l \partial_m b^k + \sum_l b^l \partial_l a^k\Big)\Delta W_n \Delta \\
&+ \sum_l b^l \partial_l b^k [(\Delta W_n)^2 - \Delta] + R_n,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$R_n := \delta\gamma_n^k + \delta\varepsilon_n^k + \delta\theta_n^k \tag{3.13}$$

となる。

$b^{k,j}$ が時間に陽に依存しない場合、すなわち、

$$dX_t^k = a^k(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{m} b^{k,j}(X_t)dW_t^j \quad (k = 1, \cdots, d) \tag{3.14}$$

の場合は、

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^k = Y_n^k &+ \frac{1}{2}(a^k(t_{n+1}, \tilde{Y}_n) + a^k(t_n, Y_n))\Delta \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\Big([b^{k,j}(R_+^j) + b^{k,j}(R_-^j) + 2b^{k,j}(Y_n)] \\ &+ \sum_{r \neq j}[b^{k,j}(U_+^r) + b^{k,j}(U_-^r) - 2b^{k,j}(Y_n)]\Big)\Delta W_n^j \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\Big([b^{k,j}(R_+^j) - b^{k,j}(R_-^j)][(\Delta W_n^j)^2 - \Delta] \\ &+ \sum_{r \neq j}[b^{k,j}(U_+^r) - b^{k,j}(U_-^r)][\Delta W_n^j \Delta W_n^r + V_{rj}]\Big)\Delta^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

とする。ここで、

$$\tilde{Y}_n^k := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta + \sum_j b^{k,j}(Y_n)\Delta W_n^j, \tag{3.16}$$

$$(R_\pm^j)^k := Y_n^k + a^k(t_n, Y_n)\Delta \pm b^{k,j}(Y_n)\sqrt{\Delta}, \tag{3.17}$$

$$(U_\pm^r)^k := Y_n^k \pm b^{k,r}(Y_n)\sqrt{\Delta} \tag{3.18}$$

である。

4 弱近似

定義：弱近似

任意の $g \in C_P^{2(\beta+1)}$ に対して、

$$E(g(X_{N\Delta})) - E(g(Y_N)) = O(\Delta^\beta) \tag{4.1}$$

のとき、近似解 Y_n は β 次の弱近似という。

定理 2

任意の $a^k, b^{k,j} \in C_P^{2(\beta+1)}$ であり、どちらも高々線形的に増加するとする。このとき、条件

$$E\Big(\prod_{h=1}^{l}(Y_{n+1}^{p_h} - Y_n^{p_h}) - \prod_{h=1}^{l}\delta Y_n^{p_h}|\mathcal{A}_{t_n}\Big) = O(\Delta^{\beta+1}), \tag{4.2}$$

$$\delta Y_n^{p_h} := \sum_{\alpha\in\Gamma_\beta\backslash\{v\}} f_\alpha^{p_h}(t_n, Y_n) I_{\alpha,t_n,t_{n+1}}, \tag{4.3}$$

$$f^p(t, X) := X^p \tag{4.4}$$

が全ての n と $(p_1, \cdots, p_l) \in \{1, \cdots, d\}^l$, $l = 1, \cdots, 2\beta+1$ に対して満たされるなら、Y_n は β 次の弱近似である。$I_{\alpha,t_n,t_{n+1}}$ は以前の I_α で $\rho \to t_n$, $\tau \to t_{n+1}$ としたものである。

(4.2) は、モーメント条件を満たす $\hat{I}_{\alpha,t_n,t_{n+1}}$ を用いた

$$Y_{n+1}^k = \sum_{\alpha\in\Gamma_\beta} f_\alpha^k(t_n, Y_n)\hat{I}_{\alpha,t_n,t_{n+1}} \tag{4.5}$$

については成り立つ。また、プラテン法 (3.2), (3.15) は、$\beta = 2$ に対して (4.2) を満たす。よってプラテン法は 2 次の弱近似である。

References

[1] Peter E. Kloeden and Eckhard Platen, “Numerical Solution of Stochastic Differential Equations”, Springer, 1992.