

プ。ープトレマイオスのエカントについてー

中嶋 慧

November 28, 2024

Abstract

ケプラーの法則から出発して、プトレマイオスのエカントについて解説する。付録では、コペルニクスの小周転円モデルを扱う。

Contents

1	ケプラー運動	1
2	プトレマイオスのエカント	3
2.1	エカントの導入	3
2.2	運動の解析	5
A	コペルニクスの小周転円	8
A.1	小周転円の導入	8
A.2	運動の解析	9

1 ケプラー運動

この記事は [1] を参考にした。

ケプラーの第1法則より、惑星 P の軌道は楕円であり、太陽 S はその1つの焦点である。この楕円の長半径を a とすると、 SP 間の距離 r は、

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi} \quad (1.1)$$

である。近日点を K とすると、 ϕ は $\angle KSP$ である。 $e (< 1)$ は離心率であり、楕円の中心 O と太陽 S との距離は ae である。

ケプラーの第2法則 (面積速度一定の法則) より、

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = h = \text{const.} \quad (1.2)$$

である。惑星の公転周期を T とし、

$$n := \frac{2\pi}{T} \quad (1.3)$$

とする。以下では、

$$\frac{d\phi}{dt} = n \frac{(1 + e \cos \phi)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (1.4)$$

を導出する。楕円の面積は、

$$hT = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (1.5)$$

である。ここで、 $b(= a\sqrt{1 - e^2})$ は短半径である。よって、

$$h = \frac{1}{2} n a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (1.6)$$

となる。(1.1), (1.2) より、

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{2h}{r^2} \\ &= n a^2 \sqrt{1 - e^2} \frac{(1 + e \cos \phi)^2}{a^2 (1 - e^2)^2} \\ &= n \frac{(1 + e \cos \phi)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

を得る。

(1.4) より、

$$\int_0^\phi d\phi' \frac{1}{(1 + e \cos \phi')^2} = \int_{t_0}^t dt' \frac{n}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (1.8)$$

である。 $t = t_0$ で $\phi = 0$ とした。(1.4) の解を、

$$\phi = \phi^{(0)} + e\phi^{(1)} + e^2\phi^{(2)} + O(e^3) \quad (1.9)$$

と展開する。明らかに、

$$\phi^{(0)} = n(t - t_0) \quad (1.10)$$

である。(1.8) より、

$$\phi - 2e \sin \phi + \frac{3}{2}e^2\phi + \frac{3e^2}{4} \sin 2\phi + O(e^3) = n(t - t_0) \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) + O(e^4) \quad (1.11)$$

である。左辺に (1.9) を代入すると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\phi^{(0)} + e\phi^{(1)} + e^2\phi^{(2)} - 2e \sin[\phi^{(0)} + e\phi^{(1)}] + \frac{3e^2}{4} \sin 2\phi^{(0)} + O(e^3) \\ &= \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\phi^{(0)} + e\phi^{(1)} + e^2\phi^{(2)} - 2e \sin \phi^{(0)} - 2e^2\phi^{(1)} \cos \phi^{(0)} + \frac{3e^2}{4} \sin 2\phi^{(0)} + O(e^3) \\ &= \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\phi^{(0)} + e(\phi^{(1)} - 2 \sin \phi^{(0)}) + e^2 \left(\phi^{(2)} - 2\phi^{(1)} \cos \phi^{(0)} + \frac{3}{4} \sin 2\phi^{(0)}\right) + O(e^3) \end{aligned} \quad (1.12)$$

である。よって、

$$\phi^{(1)} = 2 \sin \phi^{(0)}, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= 2\phi^{(1)} \cos \phi^{(0)} - \frac{3}{4} \sin 2\phi^{(0)} \\ &= \frac{5}{4} \sin 2\phi^{(0)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

を得る。従って、

$$\phi = n(t - t_0) + 2e \sin[n(t - t_0)] + \frac{5e^2}{4} \sin[2n(t - t_0)] + O(e^3) \quad (1.15)$$

となる。

さて、(1.1) より、

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos[\phi^{(0)} + e\phi^{(1)}]} + O(e^3) \quad (1.16)$$

であり、

$$\begin{aligned} e \cos[\phi^{(0)} + e\phi^{(1)}] &= e \cos \phi^{(0)} - e^2 \phi^{(1)} \sin \phi^{(0)} + O(e^3) \\ &= e \cos \phi^{(0)} - 2e^2 \sin^2 \phi^{(0)} + O(e^3), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e \cos[\phi^{(0)} + e\phi^{(1)}]} &= 1 - e \cos \phi^{(0)} + 2e^2 \sin^2 \phi^{(0)} + e^2 \cos^2 \phi^{(0)} + O(e^3) \\ &= 1 - e \cos \phi^{(0)} + e^2 [1 + \sin^2 \phi^{(0)}] + O(e^3) \end{aligned} \quad (1.18)$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos \phi^{(0)} + e^2 \sin^2 \phi^{(0)} + O(e^3) \\ &= 1 - e \cos[n(t - t_0)] + \frac{1}{2} e^2 (1 - \cos[2n(t - t_0)]) + O(e^3) \end{aligned} \quad (1.19)$$

を得る。

2 プトレマイオスのエカント

2.1 エカントの導入

今、

$$z := r(t) \mathbf{e}^{i\phi(t)} \quad (2.1)$$

と置く ($\mathbf{e} = 2.718281828 \dots$ はネイピア数) と、 e の 1 次までで、

$$z = a[1 - e \cos l] \mathbf{e}^{i(l+2e \sin l)} + O(e^2) \quad (2.2)$$

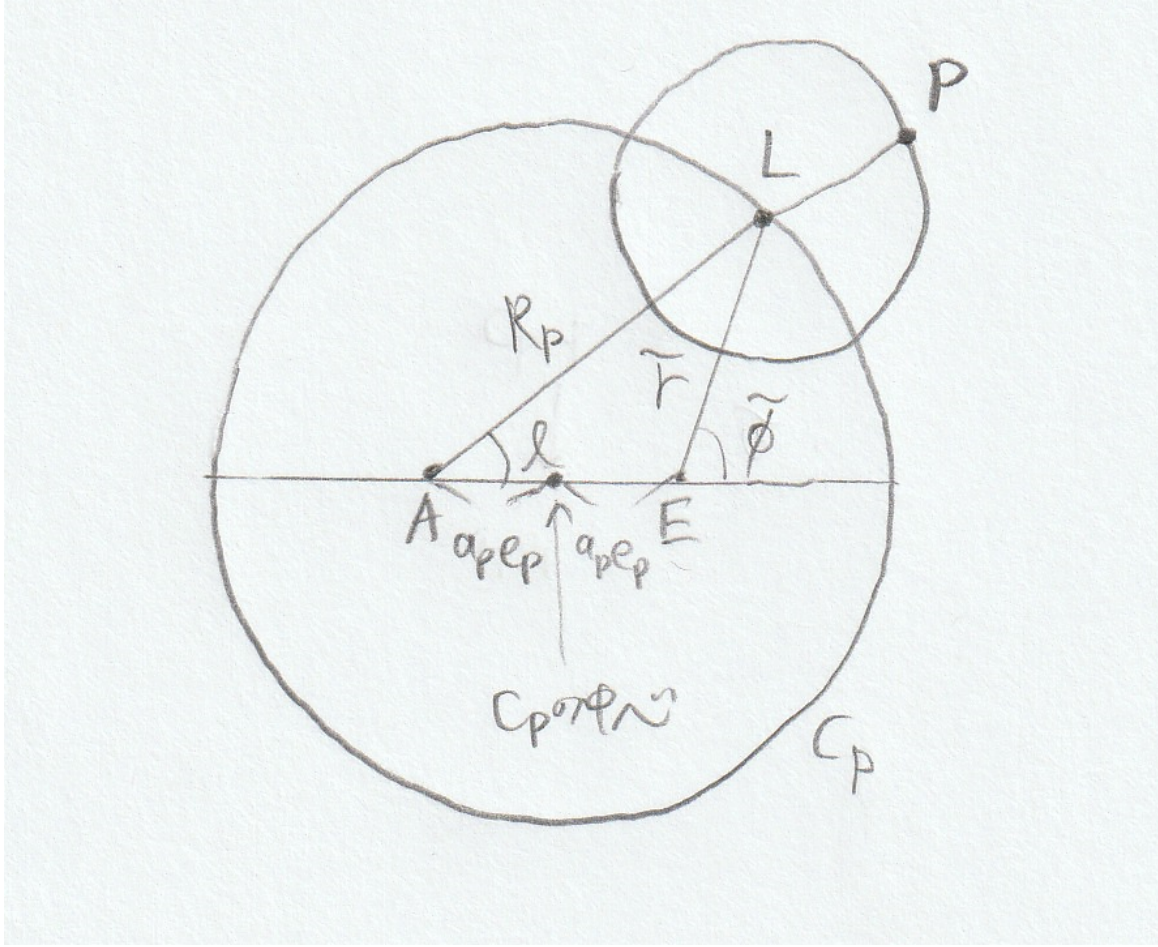


Figure 1: プトレマイオスのエカント

である。ここで、 $l := n(t - t_0)$ である。これは、

$$\begin{aligned} z &= a[1 + e \cos l]e^{il} - 2ae \cos le^{il} + i2a \sin le^{il} + O(e^2) \\ &= a[1 + e \cos l]e^{il} - 2ae + O(e^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。 P を地球以外の惑星、 E を地球とすると、

$$z_P = a_P[1 + e_P \cos l_P]e^{il_P} - 2a_P e_P + O(e_P^2), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} z_E &= a_E[1 + e_E \cos l_E]e^{il_E} - 2a_E e_E + O(e_E^2) \\ &= a_E e^{il_E} + O(e_E) \end{aligned} \quad (2.5)$$

であり、

$$z_P - z_E = a_P[1 + e_P \cos l_P]e^{il_P} - 2a_P e_P - a_E e^{il_E} + O(e_E) + O(e_P^2) \quad (2.6)$$

である。離心率は、

$$e_E = 0.0167, \quad e_{\text{水星}} = 0.2056, \quad e_{\text{火星}} = 0.0934 \quad (2.7)$$

であり、 e_E は特に小さいので、上の近似は良い。ここで、

$$a_P[1 + e_P \cos l_P] \mathbf{e}^{il_P} = R_P(l_P) \mathbf{e}^{il_P} + O(e_P^2), \quad (2.8)$$

$$R_P(l_P) = a_P e_P \cos l_P + a_P \sqrt{1 - e_P^2 \sin^2 l_P} \quad (2.9)$$

という変形をすると、

$$z_P - z_E = z_{\mathcal{J}} + O(e_E) + O(e_P^2), \quad (2.10)$$

$$z_{\mathcal{J}} := R_P(l_P) \mathbf{e}^{il_P} - 2a_P e_P - a_E \mathbf{e}^{il_E} \quad (2.11)$$

を得る。 $z_{\mathcal{J}}$ はプトレマイオスの理論による (金星以外の) 惑星の運動を表す¹⁾。

上の変形の意味は以下である。いま、

$$z_P = a_P[1 + e_P \cos l_P] \mathbf{e}^{il_P} - 2a_P e_P \quad (2.12)$$

の軌跡を考えると、これは $z = -a_P e_P$ を中心とした半径 a_P の円 C_P と近い。実際、

$$|z_P + a_P e_P|^2 = a_P^2[1 + e_P^2 \sin^2 l_P] \quad (2.13)$$

である。 $R_P(l_P)$ は、点 $z = -2a_P a_P$ (これを点 A とする) から偏角 l_P の方法に引いた直線と円 C_P と交点 L との間の距離である。

$z_{\mathcal{J}}$ の意味は以下である。地球 E ($z = 0$) から見て、 $-a_P e_P$ の点を中心とした半径 a_P の円 C_P がある (これを離心円と言う)。L は円 C_P の上を運動し、 $\angle EAL$ が時間に比例する ($\angle EAL = l_P$)。点 A をエカントという。L を中心とする半径 a_E の円 (周転円) の上を惑星 P は動く。

2.2 運動の解析

直線 AE から測った、E と L との角度を $\tilde{\phi}$ とし、E と L との間の距離を \tilde{r} とする。以下では、

$$\tilde{\phi} = l + 2e \sin l + e^2 \sin(2l) + O(e^3), \quad (2.14)$$

$$\frac{\tilde{r}}{a} = 1 - e \cos l + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l + O(e^3) \quad (2.15)$$

を示す。添字 P を省略した。なお、ニュートン力学では、

$$\phi = l + 2e \sin l + \frac{5e^2}{4} \sin(2l) + O(e^3) \quad (2.16)$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos l + e^2 \sin^2 l + O(e^3) \quad (2.17)$$

であった。 e の 1 次まで一致している。角度は、ケプラー運動から最大で $e^2/4$ だけズレる。火星の場合は、

$$\frac{1}{4}(e_{\text{火星}})^2 = 0.00218 = 0.125^\circ = 7.50 \text{ 分} \quad (2.18)$$

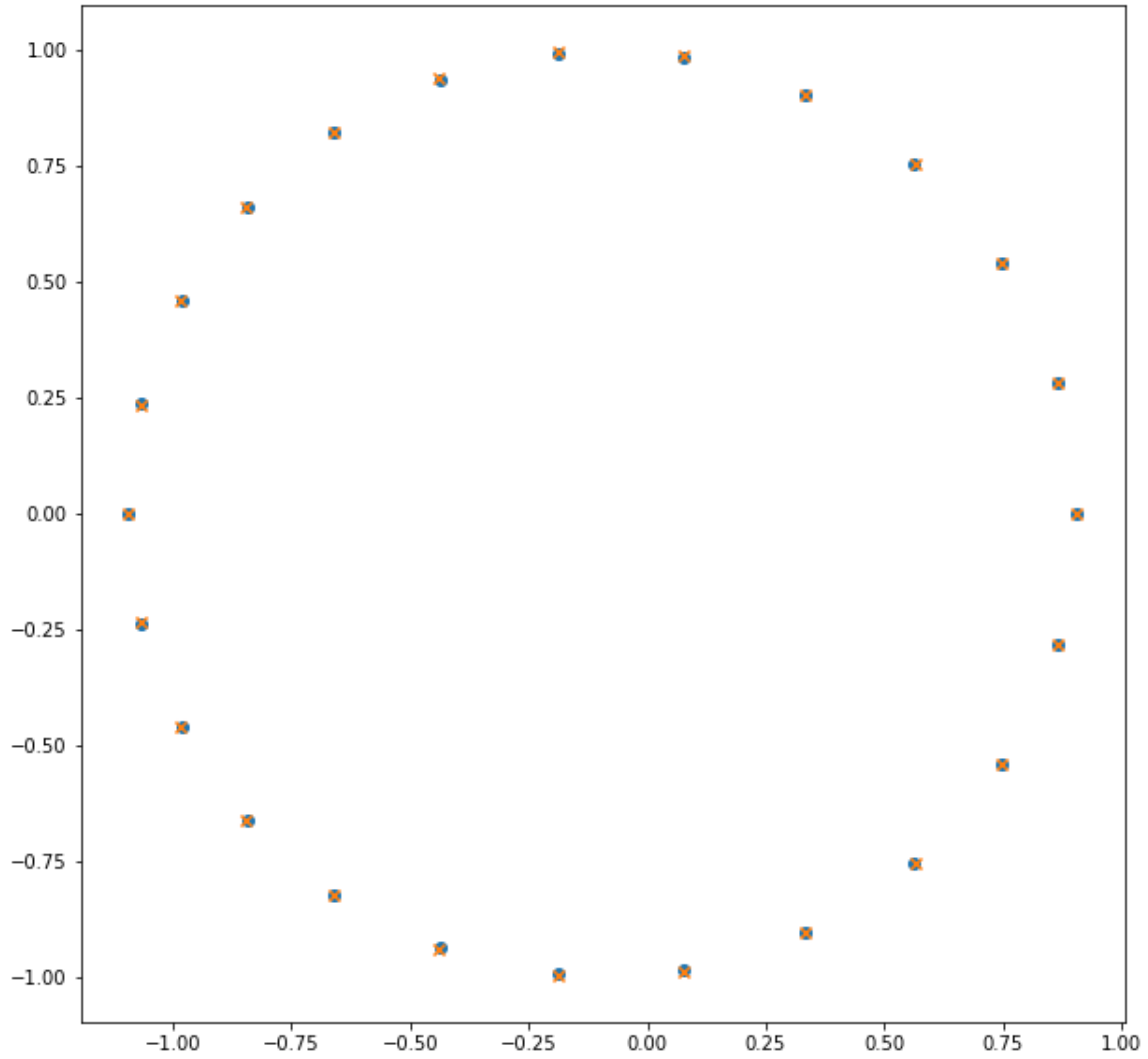


Figure 2: 火星の運動。ケプラー運動が丸で、プトレマイオスの理論が× (オレンジ)。 $l = 0$ から $l = \frac{23\pi}{12}$ まで $\frac{\pi}{12}$ おきにプロットした。原点は太陽で、 $a = 1$ とした。

である。なお、ティコ・ブラーエの観測誤差は約 1.5 分程度であった。ケプラーが研究中に、約 8 分のズレを気にして、楕円軌道の発見につながった話は有名である。

まず、 L, E の座標を z_L, z_E とすると、

$$z_L - z_E = R_P(l)e^{il} - 2ae \quad (2.19)$$

である。まず、

$$|z_L - z_E|^2 = R_P(l)^2 + 4a^2e^2 - 4aeR_P(l)\cos l \quad (2.20)$$

であり、

$$R_P(l) = a \left[1 + e \cos l - \frac{e^2}{2} \sin^2 l \right] + O(e^3) \quad (2.21)$$

¹⁾ $e_{\text{金星}} = 0.00677$ は e_E よりも小さい。プトレマイオスは金星および水星は別のやり方をしたらしい。

なので、

$$\begin{aligned}
\frac{|z_L - z_E|^2}{a^2} &= \left[1 + e \cos l - \frac{e^2}{2} \sin^2 l\right]^2 + 4e^2 - 4e(1 + e \cos l) \cos l + O(e^3) \\
&= 1 + 2e \cos l + e^2(\cos^2 l - \sin^2 l) + 4e^2 - 4e \cos l - 4e^2 \cos^2 l + O(e^3) \\
&= 1 - 2e \cos l + e^2(\cos^2 l + 3 \sin^2 l) + O(e^3)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

であり、

$$\begin{aligned}
\frac{|z_L - z_E|}{a} &= 1 - e \cos l + e^2 \frac{\cos^2 l + 3 \sin^2 l}{2} - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 l + O(e^3) \\
&= 1 - e \cos l + \frac{3e^2}{2} \sin^2 l + O(e^3)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}
\frac{z_L - z_E}{|z_L - z_E|} &= \left[\mathbf{e}^{il} - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l \mathbf{e}^{il} - 2e + e \cos l \mathbf{e}^{il} \right] \left[1 - e \cos l + \frac{3e^2}{2} \sin^2 l \right]^{-1} + O(e^3) \\
&= \mathbf{e}^{il} \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l - 2e \mathbf{e}^{-il} + e \cos l \right] \left[1 + e \cos l + e^2(\cos^2 l - \frac{3}{2} \sin^2 l) \right] + O(e^3) \\
&= \mathbf{e}^{il} \left[1 + ei2 \sin l + e^2 \left(-\frac{1}{2} \sin^2 l - 2 \cos l \mathbf{e}^{-il} + \cos^2 l + \cos^2 l - \frac{3}{2} \sin^2 l \right) \right] + O(e^3) \\
&= \mathbf{e}^{il} \left[1 + ei2 \sin l + 2e^2(i \sin l \cos l - \sin^2 l) \right] + O(e^3)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= l + \frac{1}{i} \ln \left[1 + ei2 \sin l + 2e^2(i \sin l \cos l - \sin^2 l) \right] + O(e^3) \\
&= l + 2e \sin l + e^2 \frac{1}{i} [2 \sin^2 l + 2(i \sin l \cos l - \sin^2 l)] + O(e^3) \\
&= l + 2e \sin l + e^2 \sin(2l) + O(e^3)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

を得る。

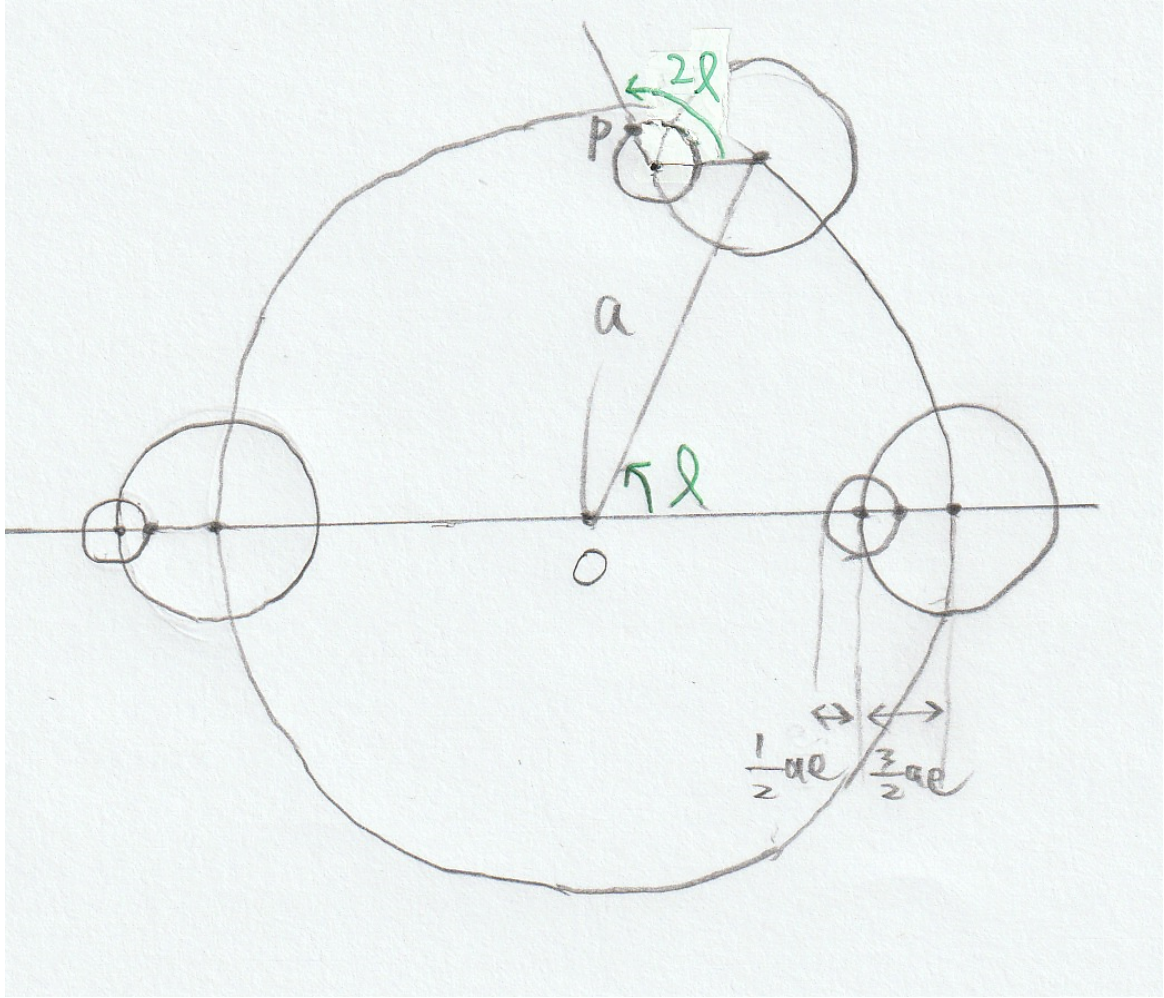


Figure 3: コペルニクスの小周転円モデル (二重周転円)

A コペルニクスの小周転円

A.1 小周転円の導入

(2.2) より、

$$\begin{aligned}
 z &= a[1 - e \cos l]e^{i(l+2e \sin l)} + O(e^2) \\
 &= a[1 - e \cos l + i2e \sin l]e^{il} + O(e^2) \\
 &= a\left[1 - e\frac{e^{il} + e^{-il}}{2} + e(e^{il} - e^{-il})\right]e^{il} + O(e^2) \\
 &= z_{\square} + O(e^2), \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

$$z_{\square} := -\frac{3}{2}ae + ae^{il} + \frac{ae}{2}e^{i2l} \tag{A.2}$$

となる。 z_{\square} がコペルニクスの小周転円モデルである [1]。13世紀のダマスカス出身のウルディーも同様のモデルを考えていたようである [2]。これは図3のようにも解釈できる。エカントが不要であり、等速円運動で説明できる。天動説の視点では、円の中心 O は地球である。

A.2 運動の解析

いま、

$$z_{\text{コ}} = \bar{r}(t) \mathbf{e}^{i\bar{\phi}(t)} \quad (\text{A.3})$$

と置く。以下では、

$$\bar{\phi} = l + 2e \sin l + e^2 \sin(2l) + O(e^3), \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\bar{r}}{a} = 1 - e \cos l + 2e^2 \sin^2 l + O(e^3) \quad (\text{A.5})$$

を示す。 $\bar{\phi}$ は e^2 まではポトレマイオスの理論と一致し、 \bar{r}/a はケプラー運動からのズレがポトレマイオスの理論よりも $\frac{e^2}{2} \sin^2 l$ だけ大きい。

まず、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{r}^2}{a^2} &= \left[-\frac{3}{2}e + \mathbf{e}^{-il} + \frac{e}{2}\mathbf{e}^{-i2l} \right] \left[-\frac{3}{2}e + \mathbf{e}^{il} + \frac{e}{2}\mathbf{e}^{i2l} \right] \\ &= \frac{9}{4}e^2 + 1 + \frac{1}{4}e^2 - 3e \cos l - \frac{3}{2}e^2 \cos(2l) + e \cos(l) \\ &= 1 - 2e \cos l + e^2 \left[\frac{5}{4} - \frac{3}{2} \cos(2l) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{r}}{a} &= 1 - e \cos l + e^2 \left[\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \cos(2l) - \frac{1}{2} \cos^2 l \right] + O(e^3) \\ &= 1 - e \cos l + e^2 \left[\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 l + \frac{3}{4} \sin^2 l - \frac{1}{2} \cos^2 l \right] + O(e^3) \\ &= 1 - e \cos l + 2e^2 \sin^2 l + O(e^3) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{i\bar{\phi}} &= \frac{-\frac{3}{2}e + \mathbf{e}^{il} + \frac{e}{2}\mathbf{e}^{i2l}}{1 - e \cos l + 2e^2 \sin^2 l} + O(e^3) \\ &= \mathbf{e}^{il} \left[1 + e \left(-\frac{3}{2}\mathbf{e}^{-il} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{il} \right) \right] \left[1 + e \cos l + e^2(-2 \sin^2 l + \cos^2 l) \right] + O(e^3) \\ &= \mathbf{e}^{il} \left[1 + e \left(-\frac{3}{2}\mathbf{e}^{-il} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{il} + \cos l \right) + e^2 \left(-2 \sin^2 l + \cos^2 l + \cos l \left(-\frac{3}{2}\mathbf{e}^{-il} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{il} \right) \right) \right] + O(e^3) \\ &= \mathbf{e}^{il} \left[1 + ei2 \sin l + e^2 \left(-2 \sin^2 l + \cos^2 l + \cos l(-\cos l + i2 \sin l) \right) \right] + O(e^3) \\ &= \mathbf{e}^{il} \left[1 + ei2 \sin l + e^2(-2 \sin^2 l + i2 \cos l \sin l) \right] + O(e^3) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となり、

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= l + \frac{1}{i} \ln \left[1 + ei2 \sin l + e^2(-2 \sin^2 l + i2 \cos l \sin l) \right] + O(e^3) \\ &= l + 2e \sin l + e^2 \frac{1}{i} \left[(-2 \sin^2 l + i2 \cos l \sin l) + 2 \sin^2 l \right] + O(e^3) \\ &= l + 2e \sin l + e^2 \sin(2l) + O(e^3) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

を得る。

References

- [1] http://fnorio.com/0157equant_or_epicycle/equant_or_epicycle.html
- [2] Roshdi Rashed and Régis Morelon, “Encyclopedia of the History of Arabic Science”, Volume 1, Routledge, 1996.