c 数空間へのマップ

中嶋 慧

2015 年 3 月 29 日 (2023 年 7 月 21 日改訂)

目 次

1　c 数空間へのマップ

この章は [1](特に付録 A.2) を参考にした。

$a, a^\dagger$ を

$$[a, a^\dagger] = 1\,, \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger] \tag{1.1}$$

を満たす生成・消滅演算子とする。さらに、

$$D(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), \tag{1.2}$$

$$D(\alpha, s) \stackrel{\text{def}}{=} D(\alpha)\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2), \tag{1.3}$$

$$\Delta_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\, D(\alpha, s)\exp(-\alpha z^* + \alpha^* z) \tag{1.4}$$

とする[1)]。$a, a^\dagger$ で記述される系の状態を ρ とすると、

$$\rho_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}[\rho\Delta_{-s}(z)] \tag{1.6}$$

$$= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\, e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2} \mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\rho] \tag{1.7}$$

は[2)]、ρ と同じ情報を持つ。つまり、

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi}\, \rho_s(z)\Delta_s(z) \tag{1.8}$$

となる。一般に、$a, a^\dagger$ の任意関数 A に対して、

$$A = \int \frac{d^2 z}{\pi}\, A_s(z)\Delta_s(z), \tag{1.9}$$

$$A_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)] \tag{1.10}$$

となる。これを示そう。

1.1　コヒーレント状態

公式

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B \qquad \text{for} \quad \big[A, [A, B]\big] = \big[B, [A, B]\big] = 0 \tag{1.11}$$

より、

$$D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \tag{1.12}$$

---

1) $\alpha = x + iy = re^{i\theta}$ とすると、

$$\int d^2\alpha \cdots \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \cdots = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta\, r \cdots \tag{1.5}$$

である。

2) $s = -1, 1, 0$ はそれぞれ P 関数, Q 関数, Wigner 関数である。詳しくは、§ 1.3。

である。また、

$$
\begin{aligned}
D(\alpha)D(\beta) &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a}\cdot e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}e^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^* a} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a}e^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^* a} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2-\alpha^*\beta)e^{\alpha a^\dagger}e^{\beta a^\dagger}e^{-\alpha^* a}e^{-\beta^* a} \\
&= \exp\big(-\frac{1}{2}|\alpha+\beta|^2-\frac{1}{2}\alpha^*\beta+\frac{1}{2}\alpha\beta^*\big)e^{(\alpha+\beta)a^\dagger}e^{-(\alpha+\beta)^* a} \\
&= D(\alpha+\beta)e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}, \qquad (1.13)\\
D^\dagger(\alpha) &= \exp[(\alpha a^\dagger-\alpha^* a)^\dagger] \\
&= D(-\alpha) \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

である。

今、コヒーレント状態

$$
|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \quad (a|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1) \tag{1.15}
$$

を定義すると、(1.12) より、

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
a|\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle = \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\
&= \alpha|\alpha\rangle \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

である。また、(1.13), (1.14), (1.12) より、

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha|\beta\rangle &= \langle 0|D(-\alpha)D(\beta)|0\rangle \\
&= \langle 0|D(-\alpha+\beta)|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|-\alpha+\beta|^2)\langle 0|e^{(-\alpha+\beta)a^\dagger}e^{-(-\alpha+\beta)^* a}|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha\beta^*+\alpha^*\beta)} \\
&= \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{1}{2}|\beta|^2+\alpha^*\beta) \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

となる。なお、(1.16) より、

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m| \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\int_0^{2\pi}d\theta\ re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{r^n}{\sqrt{n!}}\frac{r^m}{\sqrt{m!}}e^{i\theta(n-m)}|n\rangle\langle m| \\
&= 2\int_0^\infty dr\ re^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n!}|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| \\
&= 1 \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

である。ただし、(1.5) を用いた。上 2 式より、$\{|\alpha\rangle\}$ は規格非直交（過剰）完全系である。

コヒーレント状態は、シュレーディンガーにより、1926 年 7 月 (!!) に「ミクロの力学からマクロな力学への連続的移行」で与えられた。シュレーディンガーは 1926 年に「固有値問題としての量子化」(第 1 部),「固有値問題としての量子化」(第 2 部), 「ミクロの力学からマクロな力学への連続的移行」, 「ハイゼンベルグ・ボルン・ヨルダン量子力学と私の力学についての関係について」, 「固有値問題としての量子化」(第 3 部), 「固有値問題としての量子化」(第 4 部) をこの順で書いており、最後の論文で、史上初めて、クライン・ゴルドン方程式を書いている。シュレーディンガーは、「ミクロの力学からマクロな力学への連続的移行」で、コヒーレント状態の古典的な性質を示し、水素原子の場合にも、高い量子数を持った固有状態を重ね合わせれば、ケプラーの法則に従って楕円を描き、しかも形の崩れない波束ができるだろうと述べた。1927 年 (!) にハイゼンベルグは、これが誤りである事を示した。つまり、調和振動子はエネルギー準位が等間隔であるために波束が形を保つことができるが、一般の場合には波束は拡散してしまう事を証明した。

1.2 (1.9) の証明

今、演算子 A に対して、

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{1.20}$$

とする。ところで、$\{|\alpha\rangle\}$ は完全系なので、$\mathrm{Tr}(\cdots) = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \langle z|\cdots|z\rangle$ である。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)] &= \int \frac{d^2z}{\pi}\ \langle z|AD^\dagger(\alpha)|z\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \ \langle z|A|w\rangle\langle w|D^\dagger(\alpha)|z\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-w)D(-\alpha)D(z)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-w)D(-\alpha+z)|0\rangle e^{\frac{1}{2}(-\alpha z^*+\alpha^* z)} \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\langle 0|D(-\alpha+z-w)|0\rangle \\
&\qquad \times \exp\big[-w\frac{1}{2}(-\alpha+z)^* + w^*\frac{1}{2}(-\alpha+z)\big]e^{\frac{1}{2}(-\alpha z^*+\alpha^* z)} \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle \\
&\qquad \times \exp\frac{1}{2}\big[-|-\alpha+z-w|^2 - (-\alpha+z)w^* + (-\alpha+z)^*w - \alpha z^* + \alpha^* z\big] \\
&= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|z|^2+|w|^2) + zw^* + z\alpha^* - \alpha w^*\big]
\end{aligned} \tag{1.21}$$

となる。ただし、(1.13),(1.14) を使った。この計算より、

$$\langle\beta|D(\alpha)|\gamma\rangle = \exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) + \gamma\beta^* - \gamma\alpha^* + \beta^*\alpha\big] \tag{1.22}$$

である。(1.21),(1.20),(1.22) より、

$$\begin{aligned}
\langle\beta|A'|\gamma\rangle &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]\langle\beta|D(\alpha)|\gamma\rangle \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]\exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2)+\gamma\beta^*-\gamma\alpha^*+\beta^*\alpha\big] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \int\frac{d^2z}{\pi}\ \int\frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle\exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|z|^2+|w|^2)+zw^*+z\alpha^*-\alpha w^*\big] \\
&\quad\times\exp\big[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2)+\gamma\beta^*-\gamma\alpha^*+\beta^*\alpha\big] \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \int\frac{d^2z}{\pi}\ \int\frac{d^2w}{\pi}\langle z|A|w\rangle\exp\big[-|\alpha|^2+\alpha^*(z-\gamma)+\alpha(\beta^*-w^*)\big] \\
&\quad\times\exp\big[-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2)+zw^*-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\gamma|^2)+\gamma\beta^*\big].
\end{aligned} \tag{1.23}$$

今、

$$\alpha=a+ib\,,\quad z-\gamma=\mathcal{A}\,,\quad \beta^*-w^*=\mathcal{B} \tag{1.24}$$

とかくと、

$$\begin{aligned}
&-|\alpha|^2+\alpha^*(z-\gamma)+\alpha(\beta^*-w^*) \\
&= -a^2-b^2+(a-ib)\mathcal{A}+(a+ib)\mathcal{B} \\
&= -a(a-\mathcal{A}-\mathcal{B})-b(b+i\mathcal{A}-i\mathcal{B}) \\
&= -(a-[\mathcal{A}+\mathcal{B}]/2)^2+(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2/4-(b+i[\mathcal{A}-\mathcal{B}]/2)+i^2(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2/4 \\
&= -(a-[\mathcal{A}+\mathcal{B}]/2)^2-(b+i[\mathcal{A}-\mathcal{B}]/2)+\mathcal{A}\mathcal{B}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ \exp\big[-|\alpha|^2+\alpha^*(z-\gamma)+\alpha(\beta^*-w^*)\big] \\
&= \frac{1}{\pi}(\sqrt{\pi})^2\exp[\mathcal{A}\mathcal{B}] \\
&= \exp[(z-\gamma)(\beta^*-w^*)] \\
&= \exp[\beta^*z-zw^*-\gamma\beta^*+w^*\gamma]
\end{aligned} \tag{1.26}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}
(1.23) &= \int\int\frac{d^2z}{\pi}\int\frac{d^2w}{\pi}\ \langle z|A|w\rangle\exp\big[-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2)+\beta^*z-\frac{1}{2}(|\beta|^2+|\gamma|^2)+w^*\gamma\big] \\
&= \int\int\frac{d^2z}{\pi}\int\frac{d^2w}{\pi}\ \langle\beta|z\rangle\langle z|A|w\rangle\langle w|\gamma\rangle \\
&= \langle\beta|A|\gamma\rangle
\end{aligned} \tag{1.27}$$

を得る。これが任意の $|\beta\rangle,|\gamma\rangle$ について成り立つので、

$$A'=A \tag{1.28}$$

である。つまり、(1.20) は、

$$A=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[AD^\dagger(\alpha)]D(\alpha) \tag{1.29}$$

となる。
　今、

$$\alpha = a + ib, \quad z = x + iy \tag{1.30}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\alpha z^* - \alpha^* z &= (a+ib)(x-iy) - (a-ib)(x+iy) \\ &= 2i(-ay+bx)\end{aligned} \tag{1.31}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2z}{\pi}\ e^{\alpha z^* - \alpha^* z} &= \int \frac{dxdy}{\pi} e^{2i(-ay+bx)} \\ &= \pi\delta(-a)\delta(b) \\ &= \pi\delta(a)\delta(b) \equiv \pi\delta^2(\alpha)\end{aligned} \tag{1.32}$$

となる。これを用いて、(1.4) を逆フーリエ変換して、

$$D(\alpha, s) = D(\alpha)\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2) = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_s(z) e^{\alpha z^* - \alpha^* z},$$

$$D(\alpha) = \exp(-\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_s(z) e^{\alpha z^* - \alpha^* z}, \tag{1.33}$$

$$D^\dagger(\alpha) = \exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_{-s}(z) e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \tag{1.34}$$

を得る。第 2 式と第 3 式では、s が -1 倍違う。これを (1.29) に代入して、

$$\begin{aligned}A &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ \mathrm{Tr}[\exp(\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2z}{\pi}\ \Delta_{-s}(z)e^{-\alpha z^* + \alpha^* z}] \\ &\quad \times \exp(-\frac{1}{2}s|\alpha|^2)\int \frac{d^2w}{\pi}\ \Delta_s(w)e^{\alpha w^* - \alpha^* w} \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(w)\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{\alpha(w-z)^* - \alpha^*(w-z)} \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi}\int \frac{d^2w}{\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(w)\pi\delta(w-z) \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta_{-s}(z)]\Delta_s(z) \\ &= \int \frac{d^2z}{\pi}\ A_s(z)\Delta_s(z).\end{aligned} \tag{1.35}$$

第 3 等号で (1.32) を、第 5 等号で (1.10) を用いた。上式は、(1.9) である。

1.3　対称積, s-順序積

　(1.22),(1.32) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[D(\alpha)] &= \int \frac{d^2z}{\pi}\ \langle z|D(\alpha)|z\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\int \frac{d^2z}{\pi}\ e^{\alpha z^* - \alpha^* z} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\pi\delta^2(\alpha) \\ &= \pi\delta^2(\alpha)\end{aligned} \tag{1.36}$$

である。これと、(1.13) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[D(\alpha)D(\beta)] &= \mathrm{Tr}[D(\alpha+\beta)]e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)} \\ &= \pi\delta^2(\alpha+\beta)e^{\frac{1}{2}(\alpha\alpha^*-\alpha^*\alpha)} \\ &= \pi\delta^2(\alpha+\beta) \end{aligned} \tag{1.37}$$

を得る。これと、(1.4) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(w)] &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\ \mathrm{Tr}[D(\alpha)D(\beta)]e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}e^{-s\frac{1}{2}|\beta|^2}e^{-\beta w^*+\beta^* w} \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\ \pi\delta^2(\alpha)e^{\frac{1}{2}s|\alpha|^2}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}e^{-s\frac{1}{2}|\beta|^2}e^{-\beta w^*+\beta^* w} \\ &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\ e^{-\alpha(z-w)^*+\alpha^*(z-w)} \\ &= \pi\delta^2(z-w). \end{aligned} \tag{1.38}$$

これと、(1.35) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[AB] &= \int\frac{d^2z}{\pi}\int\frac{d^2w}{\pi}\ A_s(z)B_{-s}(w)\mathrm{Tr}[\Delta_s(z)\Delta_{-s}(w)] \\ &= \int\frac{d^2z}{\pi}\ A_s(z)B_{-s}(z) = \int\frac{d^2z}{\pi}\ A_{-s}(z)B_s(z) \end{aligned} \tag{1.39}$$

を得る。特に、$B=\rho$ として、

$$\langle A\rangle \equiv \mathrm{Tr}[\rho A] = \int\frac{d^2z}{\pi}\ \rho_s(z)A_{-s}(z) = \int\frac{d^2z}{\pi}\ \rho_{-s}(z)A_s(z) \tag{1.40}$$

を得る。

(1.4) より、

$$\begin{aligned} z^{*n}z^m\Delta_{-s}(z) &= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ D(\alpha,-s)z^{*n}z^m e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \\ &= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ D(\alpha,-s)(-1)^n\frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*m}}e^{-\alpha z^*+\alpha^* z} \\ &= \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\ \big[(-1)^m\frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*m}}D(\alpha,-s)\big]e^{-\alpha z^*+\alpha^* z}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

両辺を z で積分し、(1.32) を用いて、

$$\int\frac{d^2z}{\pi}\ z^{*n}z^m\Delta_{-s}(z) = \{(a^\dagger)^n a^m\}_s, \tag{1.42}$$

$$\{(a^\dagger)^n a^m\}_s \overset{\mathrm{def}}{=} (-1)^m\frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n\partial\alpha^{*m}}D(\alpha,-s)\Big|_{\alpha=0} \tag{1.43}$$

を得る。$\{(a^\dagger)^n a^m\}_s$ は s-順序積である。(1.35)

$$A = \int\frac{d^2z}{\pi}\ A_{-s}(z)\Delta_{-s}(z)$$

より、これは

$$(\{(a^\dagger)^n a^m\}_s)_{-s}(z) = z^{*n}z^m \tag{1.44}$$

を意味する。これと (1.40) より、

$$\langle\{(a^\dagger)^n a^m\}_s\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_s(z) z^{*n} z^m \tag{1.45}$$

を得る。今、

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A^{(s)}_{nm}\{(a^\dagger)^n a^m\}_s \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A^{(s)}_{nm} \int \frac{d^2z}{\pi} z^{*n} z^m \Delta_{-s}(z) \end{aligned} \tag{1.46}$$

と書くと、(1.26) と比べて、

$$A_{-s}(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A^{(s)}_{nm} z^{*n} z^m \tag{1.47}$$

となる。これから、

$$A^{(s)}_{nm} = n!m! \frac{\partial^{n+m} A_{-s}(z)}{\partial z^{*n} \partial z^m}\Big|_{z=0} \tag{1.48}$$

を得る。

　ところで、(1.12) より、

$$\begin{aligned} D(\alpha, -s) &= D(\alpha) e^{-\frac{1}{2}s|\alpha|^2} \\ &= e^{\frac{-1-s}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{\frac{1-s}{2}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \end{aligned} \tag{1.49}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_1 &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger}\Big|_{\alpha=0} \\ &= a^m (a^\dagger)^n, \end{aligned} \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_{-1} &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}\Big|_{\alpha=0} \\ &= (a^\dagger)^n a^m \end{aligned} \tag{1.51}$$

である。よって、

$$\langle (a^\dagger)^n a^m\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_{-1}(z) z^{*n} z^m, \tag{1.52}$$

$$\langle a^m (a^\dagger)^n\rangle = \int \frac{d^2z}{\pi}\ \rho_1(z) z^{*n} z^m \tag{1.53}$$

である。$\rho_{-1}(z)$ を P 関数, $\rho_1(z)$ を Q 関数という。また、

$$\begin{aligned} \{(a^\dagger)^n a^m\}_0 &= (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^m \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^k\Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{(-1)^m}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a)^{n+m}\Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{(n+m)!} \frac{\partial^{n+m}}{\partial\alpha^n \partial\alpha^{*m}} (\alpha a^\dagger + \alpha^* a)^{n+m}\Big|_{\alpha=0} \end{aligned} \tag{1.54}$$

である。例えば、

$$\{a^\dagger a\}_0 = \frac{a^\dagger a + a a^\dagger}{2} \tag{1.55}$$

であり、$\{(a^\dagger)^n a^m\}_0$ は、$a, a^\dagger$ について対称である。これは Weyl 順序と呼ばれる。また、$\rho_0(z)$ を Wigner 関数という。

(1.7) より、

$$W(z) \equiv \rho_0(z) \, = \, \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \, e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \rho] \tag{1.56}$$

である。以下に示すように、

$$\Delta_{-1}(z) \, = \, |z\rangle\langle z| \tag{1.57}$$

なので、(1.8) より、

$$\rho \, = \, \int \frac{d^2 z}{\pi} \, P(z)|z\rangle\langle z| \,, \quad P(z) \equiv \rho_{-1}(z) \tag{1.58}$$

で、(1.6) より、

$$Q(z) \equiv \rho_1(z) \, = \, \langle z|\rho|z\rangle \tag{1.59}$$

を得る。(1.57) を示そう。(1.4), (1.12) より、

$$\begin{aligned}
\Delta_s(z) \, &= \, \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \, e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger} \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \, e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} e^{-\alpha^* a} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \, |\beta\rangle\langle\beta| e^{\alpha a^\dagger} \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi} \, |\beta\rangle\langle\beta| \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \, e^{\frac{1+s}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha(z^* - \beta^*) + \alpha^*(z - \beta)}
\end{aligned} \tag{1.60}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
\Delta_{-1}(z) \, &= \, \int \frac{d^2\beta}{\pi} \, |\beta\rangle\langle\beta| \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \, e^{-\alpha(z^* - \beta^*) + \alpha^*(z - \beta)} \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi} \, |\beta\rangle\langle\beta| \pi \delta^2(z - \beta) \\
&= |z\rangle\langle z|.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

1.4 諸公式

A, B を $a, a^\dagger$ の関数とする。(1.8) より、

$$A\rho B \, = \, \int \frac{d^2 z}{\pi} \, \rho_s(z) A \Delta_s(z) B \tag{1.62}$$

である。また、(1.4) より、

$$A\Delta_s(z)B \, = \, \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \, A D(\alpha, s) B e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \tag{1.63}$$

である。$A\Delta_s(z)B$ が、

$$A\Delta_s(z)B \;=\; f_s^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\Delta_s(z) \tag{1.64}$$

の形にかけるので、(1.62) より、

$$\begin{aligned} A\rho B \;&=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\;\rho_s(z)[f_s^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\Delta_s(z)] \\ &=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\;[f_s'^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\rho_s(z)]\Delta_s(z) \end{aligned} \tag{1.65}$$

となる。$f_s'^{AB}$ は部分積分を実行して、微分を $\rho_s(z)$ に移したときの関数形である。上式は、

$$(A\rho B)_s(z) = f_s'^{AB}(z,z^*;\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z^*})\rho_s(z) \tag{1.66}$$

を意味する。$f_s'^{AB}$ を求めよう。(1.12) より、

$$\begin{aligned} D(\alpha,s) \;&=\; e^{\frac{1}{2}(s-1)|\alpha|^2}e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a} \\ &=\; e^{\frac{1}{2}(s+1)|\alpha|^2}e^{-\alpha^* a}e^{\alpha a^\dagger} \end{aligned} \tag{1.67}$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}D(\alpha,s) \;=\; \big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha^* + a^\dagger\big]D(\alpha,s) = D(\alpha,s)\big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha^* + a^\dagger\big], \tag{1.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}D(\alpha,s) \;=\; D(\alpha,s)\big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha - a\big] = \big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha - a\big]D(\alpha,s) \tag{1.69}$$

であり、これより、

$$aD(\alpha,s) \;=\; \big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\big]D(\alpha,s), \tag{1.70}$$

$$a^\dagger D(\alpha,s) \;=\; \big[-\frac{1}{2}(s-1)\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha}\big]D(\alpha,s), \tag{1.71}$$

$$D(\alpha,s)a \;=\; \big[\frac{1}{2}(s-1)\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\big]D(\alpha,s), \tag{1.72}$$

$$D(\alpha,s)a^\dagger \;=\; \big[-\frac{1}{2}(s+1)\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\big]D(\alpha,s) \tag{1.73}$$

を得る。これと (1.63) より、

$$\begin{aligned} a\Delta_s(z) \;&=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;aD(\alpha,s)e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;\big[\frac{1}{2}(s+1)\alpha D(\alpha,s) - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}D(\alpha,s)\big]e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;\big[-\frac{1}{2}(s+1)D(\alpha,s)\frac{\partial}{\partial z^*}e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} + D(\alpha,s)\frac{\partial}{\partial\alpha^*}e^{-\alpha z^* + \alpha^* z}\big] \\ &=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\;\big[-\frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*} + z\big]D(\alpha,s)e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \\ &=\; \big[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Delta_s(z) \end{aligned} \tag{1.74}$$

同様に、

$$a^\dagger \Delta_s(z) \;=\; \big[z^* - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Delta_s(z), \tag{1.75}$$

$$\Delta_s(z) a \;=\; \big[z - \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Delta_s(z), \tag{1.76}$$

$$\Delta_s(z) a^\dagger \;=\; \big[z^* - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Delta_s(z) \tag{1.77}$$

を得る。(1.62) より、

$$\begin{aligned} a\rho \;&=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\; \rho_s(z)\big[z - \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Delta_s(z) \\ &=\; \int \frac{d^2z}{\pi}\; \big\{\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\big\}\Delta_s(z) \end{aligned} \tag{1.78}$$

つまり、

$$(a\rho)_s(z) = \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z) \tag{1.79}$$

である。同様に、

$$(\rho a)_s(z) \;=\; \big[z + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z), \tag{1.80}$$

$$(a^\dagger \rho)_s(z) \;=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z), \tag{1.81}$$

$$(\rho a^\dagger)_s(z) \;=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z) \tag{1.82}$$

を得る。また、

$$(a^2\rho)_s(z) \;=\; \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]^2\rho_s(z), \tag{1.83}$$

$$\begin{aligned} (a\rho a^\dagger)_s(z) \;&=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Big(\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\Big) \\ &=\; \big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\Big(\big[z^* + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\rho_s(z)\Big), \end{aligned} \tag{1.84}$$

$$(a^\dagger a\rho)_s(z) \;=\; \big[z^* + \frac{1}{2}(s-1)\frac{\partial}{\partial z}\big]\Big(\big[z + \frac{1}{2}(s+1)\frac{\partial}{\partial z^*}\big]\rho_s(z)\Big) \tag{1.85}$$

などである。

(1.79) から (1.82) は、

$$\rho \to F = (\text{任意の演算子}) \tag{1.86}$$

としても成り立つ。いま、$s=1$ とすると、(1.45),(1.79) より、

$$([a^\dagger]^n)_1(z) \;=\; (z^*)^n, \tag{1.87}$$

$$\begin{aligned} (a^m[a^\dagger]^n)_1(z) \;&=\; \big[z + \frac{\partial}{\partial z^*}\big]^m (z^*)^n \\ &=\; \sum_{r=0}^{m} {}_mC_r z^{m-r}\frac{\partial^r}{\partial z^{*r}} z^{*n} \\ &=\; \sum_{r=0}^{\min(n,m)} {}_mC_r z^{m-r}\frac{n!}{(n-r)!} z^{*(n-r)} \\ &=\; \sum_{r=0}^{\min(n,m)} \frac{m!n!}{r!(m-r)!(n-r)!} z^{m-r} z^{*(n-r)} \end{aligned} \tag{1.88}$$

である。また、(1.80) より、

$$(Fa^n)_1(z) = z^n F_1(z) \tag{1.89}$$

なので、

$$z^{m-r} z^{*(n-r)} = ([a^\dagger]^{n-r} a^{m-r})_1(z) \tag{1.90}$$

である。(1.88),(1.90) より、

$$a^m [a^\dagger]^n = \sum_{r=0}^{\min(n,m)} \frac{m!n!}{r!(m-r)!(n-r)!} [a^\dagger]^{n-r} a^{m-r} \tag{1.91}$$

を得る。

2 Wigner 関数の一般化

一般化 Wigner 関数は、[2] で谷村省吾により提案された。

$\{X_i\}_{i=1}^n$ を任意の演算子とし、

$$\mathcal{D}(\chi) \;=\; e^{i\sum \chi_i X_i}, \tag{2.1}$$
$$W(x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int \frac{d^n\chi}{(2\pi)^n}\; e^{-i\sum x_i\chi_i}\mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\chi)\rho] \tag{2.2}$$

とする。$W(\chi)$ は、Wigner 関数 (1.56)

$$W(z) \;=\; \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\; e^{-\alpha z^* + \alpha^* z}\mathrm{Tr}[e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}\rho] \tag{2.3}$$

の一般化である。実際、

$$\alpha \;=\; \frac{a+ib}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}, \tag{2.4}$$
$$a \;=\; \frac{X+iP}{\sqrt{2}} \quad (X^\dagger = X,\; P^\dagger = P) \tag{2.5}$$

と書くと、

$$-\alpha z^* + \alpha^* z \;=\; i(ay - bx), \quad \alpha a^\dagger - \alpha^* a = i(-aP + bX) \tag{2.6}$$

となり、

$$\begin{aligned} W(x,y) \;&\equiv\; \frac{1}{2\pi}W(z = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}) \\ &= \int \frac{d^2\chi}{(2\pi)^2}\; e^{-i(x\chi_1 + y\chi_2)}\mathrm{Tr}[e^{i(\chi_1 X + \chi_2 P)}\rho] \quad (\alpha = \frac{-\chi_2 + i\chi_1}{\sqrt{2}}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

である。

$W(x)$ は実である：

$$\begin{aligned} W^*(x) \;&=\; \int \frac{d^n\chi}{(2\pi)^n}\; e^{i\sum x_i\chi_i}\mathrm{Tr}[\rho^\dagger\mathcal{D}^\dagger(\chi)] \\ &= \int \frac{d^n\chi}{(2\pi)^n}\; e^{i\sum x_i\chi_i}\mathrm{Tr}[\mathcal{D}(-\chi)\rho] \\ &= \int \frac{d^n\chi}{(2\pi)^n}\; e^{-i\sum x_i\chi_i}\mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\chi)\rho] \\ &= W(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

しかし、一般に負にもなる。また、

$$\begin{aligned} \int d^n x\; x_i W(x) \;&=\; \int d^n x\; x_i \int \frac{d^n\chi}{(2\pi)^n}\; e^{-i\sum x_i\chi_i}\mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\chi)\rho] \\ &= \int d^n x \int \frac{d^n\chi}{(2\pi)^n}\; (-1)\frac{\partial e^{-i\sum x_i\chi_i}}{\partial(i\chi_i)}\mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\chi)\rho] \\ &= \int \frac{d^n x}{(2\pi)^n}\; e^{i\sum x_i\chi_i} \int d^n\chi\; \frac{\partial \mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\chi)\rho]}{\partial(i\chi_i)} \\ &= \frac{\partial \mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\chi)\rho]}{\partial(i\chi_i)}\Big|_{\chi=0} \\ &= \mathrm{Tr}[X_i\rho] \end{aligned} \tag{2.9}$$

であり、同様に、

$$\int d^n x\ f(x_i) W(x) \ = \ \mathrm{Tr}[f(X_i)\rho]. \tag{2.10}$$

今、

$$W_i(x_i) \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \prod_{j(\neq i)} dx_j\ W(x) \tag{2.11}$$

とすると、(2.10) は、

$$\int dx_i\ f(x_i) W_i(x_i) \ = \ \mathrm{Tr}[f(X_i)\rho] \tag{2.12}$$

となる。これは、一般の非負の $f(x)$ について成り立つので、$W_i(x_i)$ は非負

$$W_i(x_i) \geq 0 \tag{2.13}$$

である。上 2 式は、(3.21), (3.25) の拡張である。また、(2.9) の導出の同様に、

$$\begin{aligned}\int d^n x\ x_{i_i} x_{i_2} \cdots x_{i_N} W(x) \ &= \ \frac{\partial^N \mathrm{Tr}[\mathcal{D}(\chi)\rho]}{\partial(i\chi_{i_1})(i\chi_{i_2})\cdots(i\chi_{i_N})}\Big|_{\chi=0} \\ &= \ \mathrm{Tr}[\{X_{i_i} X_{i_2} \cdots X_{i_N}\}_{\mathrm{sym}}\rho],\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\{X_{i_i} X_{i_2} \cdots X_{i_N}\}_{\mathrm{sym}} \ &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \frac{\partial^N \mathcal{D}(\chi)}{\partial(i\chi_{i_1})(i\chi_{i_2})\cdots(i\chi_{i_N})}\Big|_{\chi=0} \\ &= \ \frac{\partial^N e^{i\sum \chi_i X_i}}{\partial(i\chi_{i_1})(i\chi_{i_2})\cdots(i\chi_{i_N})}\Big|_{\chi=0} \\ &= \ \frac{\partial^N e^{\sum \chi_i X_i}}{\partial\chi_{i_1}\partial\chi_{i_2}\cdots\partial\chi_{i_N}}\Big|_{\chi=0}\end{aligned} \tag{2.15}$$

を得る。今、

$$S(\chi) \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \sum_{i=1}^{N} \chi_i X_i \tag{2.16}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\{X_{i_i} X_{i_2} \cdots X_{i_N}\}_{\mathrm{sym}} \ &= \ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^N}{\partial\chi_{i_1}\partial\chi_{i_2}\cdots\partial\chi_{i_N}} \frac{S^m(\chi)}{m!}\Big|_{\chi=0} \\ &= \ \frac{1}{N!} \frac{\partial^N S^N(\chi)}{\partial\chi_{i_1}\partial\chi_{i_2}\cdots\partial\chi_{i_N}}\Big|_{\chi=0}\end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。これは、一般化 Weyl 順序積で、例えば、

$$\begin{aligned}\{X_1 X_2\}_{\mathrm{sym}} \ &= \ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\chi_1\partial\chi_2}(\chi_1^2 X_1^2 + \chi_1\chi_2[X_1X_2 + X_2X_1] + \chi_2^2 X^2)\Big|_{\chi=0} \\ &= \ \frac{X_1X_2 + X_2X_1}{2}\end{aligned} \tag{2.18}$$

である。

　また、$\mathcal{D}(\chi)$ の部分を、

$$\mathcal{D}'(\chi) \ = \ e^{i\chi_1 X_1} e^{i\chi_2 X_2} \cdots e^{i\chi_n X_n} \tag{2.19}$$

に変えたものを $W'(\chi)$ と書くと、

$$\int d^n x\ f(x_i) W'(x) \;=\; \mathrm{Tr}[f(X_i)\rho], \tag{2.20}$$

$$W_i'(x_i) \;=\; W_i(x_i) \geq 0 \tag{2.21}$$

であるが、$W'(\chi)$ は実ではない：

$$[W'(x)]^* \;\neq\; W'(x). \tag{2.22}$$

また、

$$\int d^n x\ x_{i_i} x_{i_2} \cdots x_{i_N} W'(x) \;=\; \mathrm{Tr}[X_{i_i} X_{i_2} \cdots X_{i_N} \rho] \quad (1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots i_N \leq n) \tag{2.23}$$

である[3)]。

[3)] s-順序積の拡張は？

3 α-順序積と経路積分

この章は [3] や、製作者不明のノート「Weyl 順序積と Weyl 変換」を参考にした。

3.1 α-順序積

$$X = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad P = i\frac{-a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \tag{3.1}$$

に対して、

$$\begin{aligned}[X, P] &= \frac{[a, ia^\dagger] + [a^\dagger, -ia]}{2} \\ &= i\end{aligned} \tag{3.2}$$

である。また、

$$X|x\rangle = x|x\rangle, \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \tag{3.3}$$

$$P|p\rangle = p|p\rangle, \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p') \tag{3.4}$$

とする。今、

$$U(q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-iqP}, \tag{3.5}$$

$$X(q) \stackrel{\mathrm{def}}{=} U^\dagger(q)X(q)U(q) \tag{3.6}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\frac{dX(q)}{dq} &= iU(\alpha)[P, X]U^\dagger(q) \\ &= 1\end{aligned} \tag{3.7}$$

なので、

$$U^\dagger(q)XU(q) = X + q \tag{3.8}$$

となる。よって、

$$XU(q)|x\rangle = (x + q)U(q)|x\rangle, \tag{3.9}$$

$$U(q)|x\rangle = |x + q\rangle \tag{3.10}$$

である。これより、

$$\langle p|x_0\rangle e^{-ipq} = \langle p|x_0 + q\rangle \tag{3.11}$$

であり、規格化を考えると、

$$\langle p|x\rangle = \frac{e^{-ipx}}{2\pi} \tag{3.12}$$

となる。

(2.7) の形に書いた $\rho_s(z)$ を、

$$\rho_s(x,p) = \int \frac{d^2\chi}{(2\pi)^2}\ e^{-i(x\chi_1+p\chi_2)-\frac{s}{4}(\chi_1^2+\chi_2^2)}\mathrm{Tr}[e^{i(\chi_1 X+\chi_2 P)}\rho] \tag{3.13}$$

とする。(1.11) より、

$$e^{i(\chi_1 X+\chi_2 P)} = e^{i\chi_1\chi_2/2}e^{i\chi_1 X}e^{i\chi_2 P} \tag{3.14}$$

であり、

$$\begin{aligned}\rho_s(x,p) &= \int dy \int \frac{d^2\chi}{(2\pi)^2}\ e^{-i(x\chi_1+p\chi_2)-\frac{s}{4}(\chi_1^2+\chi_2^2)}e^{i\chi_1\chi_2/2}\langle y|e^{i\chi_1 X}e^{i\chi_2 P}\rho|y\rangle \\ &= \int dy \int \frac{d^2\chi}{(2\pi)^2}\ e^{-i(x\chi_1+p\chi_2)-\frac{s}{4}(\chi_1^2+\chi_2^2)}e^{i\chi_1\chi_2/2}e^{i\chi_1 y}\langle y+\chi_2|\rho|y\rangle \end{aligned} \tag{3.15}$$

を得る。まず、$s=0$ を考えると、

$$\begin{aligned}\rho_0(x,p) &= \int dy \int \frac{d\chi_1 d\chi_2}{(2\pi)^2}\ e^{-i(x\chi_1+p\chi_2)}e^{i\chi_1\chi_2/2}e^{i\chi_1 y}\langle y+\chi_2|\rho|y\rangle \\ &= \int dy \int \frac{d\chi_1}{2\pi}\int \frac{d\chi_2}{2\pi}\ e^{-ip\chi_2}e^{i\chi_1(-x+y+\chi_2/2)}\langle y+\chi_2|\rho|y\rangle \\ &= \int \frac{d\chi_2}{2\pi}\ e^{-ip\chi_2}\langle x+\chi_2/2|\rho|x-\chi_2/2\rangle \\ &= \int \frac{dq}{2\pi}\ e^{ipq}\langle x-\frac{q}{2}|\rho|x+\frac{q}{2}\rangle \end{aligned} \tag{3.16}$$

となる。$s\neq 0$ の場合は、

$$\rho_s(x,p) = \int dy \int \frac{d\chi_1 d\chi_2}{(2\pi)^2}\ e^{-ip\chi_2-\frac{s}{4}\chi_2^2}e^{-\frac{s}{4}\chi_1^2+i\chi_1(y-x+\chi_2/2)}\langle y+\chi_2|\rho|y\rangle \tag{3.17}$$

で、公式

$$\int dx\ e^{-\alpha x^2+i\beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\Big[-\frac{\beta^2}{4\alpha}\Big] \tag{3.18}$$

より、

$$\begin{aligned}\rho_s(x,p) &= \int dy \int \frac{d\chi_2}{(2\pi)^2}\ e^{-ip\chi_2-\frac{s}{4}\chi_2^2}\sqrt{\frac{4\pi}{s}}\exp\Big[-\frac{(-x+y+\chi_2/2)^2}{s}\Big]\langle y+\chi_2|\rho|y\rangle \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{s}}\int dy \int \frac{d\chi_2}{(2\pi)^2}\ \exp\Big[-i\chi_2(p-i\frac{(-x+y)}{s})-\frac{\chi_2^2}{4}\frac{1+s^2}{s}\Big]\langle y+\chi_2|\rho|y\rangle \end{aligned} \tag{3.19}$$

となる。

(3.16) の拡張として、

$$A_\alpha(x,p) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int dq\ e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|A|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \tag{3.20}$$

とする。これも Wigner 関数の一般化と言える。このとき、

$$\begin{aligned}A_\alpha(x) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \int \frac{dp}{2\pi}\ A_\alpha(x,p) \\ &= \int \frac{dp}{2\pi}\int dq\ e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|A|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \\ &= \langle x|A|x\rangle \end{aligned} \tag{3.21}$$

であり、

$$\begin{aligned}A_\alpha(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{(2\pi)^2}\ A_\alpha(x,p) \\ &= \frac{dp}{(2\pi)^2}\int dx \int dq\ e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|A|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \end{aligned} \tag{3.22}$$

である。今、

$$x_1 = x+\frac{1-\alpha}{2}q\,, \quad x_2 = x-\frac{1+\alpha}{2}q \tag{3.23}$$

とすると、

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}+\frac{\alpha}{2}q\,, \quad q = x_1-x_2 \tag{3.24}$$

であり、($-1<\alpha$ として、)

$$\begin{aligned}A_\alpha(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dx_1 \int dx_2\ e^{ip(x_1-x_2)}\langle x_2|A|x_1\rangle \\ &= \int dx_1 \int dx_2\ \langle p|x_2\rangle\langle x_2|A|x_1\rangle\langle x_1|p\rangle \\ &= \langle p|A|p\rangle \end{aligned} \tag{3.25}$$

となる。

今、

$$\Delta_\alpha(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} \int dq\ e^{iqp}|x+\frac{1+\alpha}{2}q\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}q| \tag{3.26}$$

とすると、

$$A'_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dxdp}{2\pi}\ A_\alpha(x,p)\Delta_\alpha(x,p) \tag{3.27}$$

は、

$$\begin{aligned}A'_\alpha &= \int \frac{dxdp}{2\pi}\int dq \int dy\ e^{ip(q+y)}|x+\frac{1+\alpha}{2}y\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}q|A|x+\frac{1+\alpha}{2}q\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}y| \\ &= \int dx \int dq\ |x-\frac{1-\alpha}{2}q\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}q|A|x+\frac{1+\alpha}{2}q\rangle\langle x+\frac{1+\alpha}{2}q| \\ &= \int dx_1 \int dx_2\ |x_1\rangle\langle x_1|A|x_2\rangle\langle x_2| \\ &= A \end{aligned} \tag{3.28}$$

となる。つまり、

$$A = \int \frac{dxdp}{2\pi}\ A_\alpha(x,p)\Delta_\alpha(x,p) \tag{3.29}$$

である。更に、

$$A_\alpha(x,p) = \mathrm{Tr}[A\Delta_{-\alpha}(x,p)] = \mathrm{Tr}[A\Delta^\dagger_\alpha(x,p)] \tag{3.30}$$

であるから、

$$A = \int \frac{dxdp}{2\pi}\ \mathrm{Tr}[A\Delta^\dagger_\alpha(x,p)]\Delta_\alpha(x,p). \tag{3.31}$$

今、

$$A = E^{a,b} \overset{\text{def}}{=} e^{i(aX+bP)} \tag{3.32}$$

に対して、

$$E_\alpha^{a,b}(x,p) \;=\; \int dq\; e^{ipq}\langle x - \frac{1+\alpha}{2}q|e^{i(aX+bP)}|x + \frac{1-\alpha}{2}q\rangle \tag{3.33}$$

を考えると、

$$\begin{aligned} E_\alpha^{a,b}(x,p) \;&=\; \int dq\; e^{ipq}e^{iab/2}\langle x - \frac{1+\alpha}{2}q|e^{iaX}e^{ibP}|x + \frac{1-\alpha}{2}q\rangle \\ &= \int dq\; e^{ipq}e^{iab/2}e^{ia(x-\frac{1+\alpha}{2}q)}\langle x - \frac{1+\alpha}{2}q|x + \frac{1-\alpha}{2}q - b\rangle \\ &= \int dq\; e^{ipq}e^{iab/2}e^{ia(x-\frac{1+\alpha}{2}q)}\delta(q-b) \\ &= e^{ipb}e^{iab/2}e^{ia(x-\frac{1+\alpha}{2}b)} \\ &= e^{i(ax+bp-\alpha ab/2)} \end{aligned} \tag{3.34}$$

となる。特に、$\alpha = -1, 0, 1$ に対して、

$$(e^{iaX}e^{ibP})_{-1}(x,p) = (e^{i(aX+bP)})_0(x,p) = (e^{ibP}e^{iaX})_1(x,p) \;=\; e^{iax+ibp} \tag{3.35}$$

となる。α-順序積を

$$\{X^nP^m\}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dxdp}{2\pi}\; x^np^m\Delta_\alpha(x,p) \tag{3.36}$$

で定義する。特に、

$$\int \frac{dxdp}{2\pi}\; e^{iax}e^{ibp}\Delta_{-1}(x,p) \;=\; e^{iaX}e^{ibP}, \tag{3.37}$$

$$\int \frac{dxdp}{2\pi}\; e^{iax}e^{ibp}\Delta_0(x,p) \;=\; e^{i(aX+bP)}, \tag{3.38}$$

$$\int \frac{dxdp}{2\pi}\; e^{iax}e^{ibp}\Delta_1(x,p) \;=\; e^{ibP}e^{iaX} \tag{3.39}$$

より、

$$\{X^nP^m\}_{-1} = X^nP^m\,, \quad \{X^nP^m\}_1 = P^mX^n \tag{3.40}$$

および、

$$\{X^nP^m\}_0 \;=\; \frac{1}{(n+m)!}\frac{\partial^{n+m}(aX+bP)^{n+m}}{\partial a^n\partial b^m}\Big|_{a,b=0} \tag{3.41}$$

を得る。

3.2 経路積分

経路積分では、

$$\begin{aligned} \langle x_{i+1}|e^{iH\delta t}|x_i\rangle \;&=\; \langle x_{i+1}|x_i\rangle - i\langle x_{i+1}|H|x_i\rangle\delta t \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi}\; e^{ip_i(x_{i+1}-x_i)} - i\langle x_{i+1}|H|x_i\rangle\delta t \end{aligned} \tag{3.42}$$

が重要である。第 2 項は、(3.29) より、

$$\begin{aligned}\langle x_{i+1}|H|x_i\rangle &= \int \frac{dxdp_i}{2\pi}\ H_\alpha(x,p_i)\langle x_{i+1}|\Delta_\alpha(x,p_i)|x_i\rangle \\ &= \int \frac{dxdp_i}{2\pi}\ H_\alpha(x,p_i)\int dq\ e^{iqp_i}\langle x_{i+1}|x+\frac{1+\alpha}{2}q\rangle\langle x-\frac{1-\alpha}{2}q|x_i\rangle \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi}\int dxdq\ H_\alpha(x,p_i)e^{iqp_i}\delta(x_{i+1}-[x+\frac{1+\alpha}{2}q])\delta(x-\frac{1-\alpha}{2}q-x_i) \qquad (3.43)\end{aligned}$$

となる。変数変換

$$x_1 = x+\frac{1+\alpha}{2}q,\quad x_2 = x-\frac{1-\alpha}{2}q\ ;\ x=\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\alpha}{2}q,\quad q=x_1-x_2 \qquad (3.44)$$

より、

$$\begin{aligned}\langle x_{i+1}|H|x_i\rangle &= \int \frac{dp_i}{2\pi}\int dx_1dx_2\ H_\alpha(\frac{x_1+x_2-\alpha[x_1-x_2]}{2},p_i)e^{i[x_1-x_2]p_i}\delta(x_{i+1}-x_1)\delta(x_2-x_i) \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi}\ e^{i(x_{i+1}-x_i+1)p_i}H_\alpha(\frac{x_{i+1}+x_i-\alpha[x_{i+1}-x_i]}{2},p_i) \\ &\equiv \int \frac{dp_i}{2\pi}\ e^{i(x_{i+1}-x_i+1)p_i}H_\alpha(x_i^{(\alpha)},p_i)\quad (x_i^{(\alpha)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{x_{i+1}+x_i-\alpha[x_{i+1}-x_i]}{2}) \qquad (3.45)\end{aligned}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}\langle x_{i+1}|e^{iH\delta t}|x_i\rangle &= \langle x_{i+1}|x_i\rangle - i\langle x_{i+1}|H|x_i\rangle\delta t \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi}\ e^{ip_i(x_{i+1}-x_i)}[1-iH_\alpha(x_i^{(\alpha)},p_i)\delta t] \\ &= \int \frac{dp_i}{2\pi}\ \exp\Big[i\delta t\big(p_i\frac{x_{i+1}-x_i}{\delta t}-H_\alpha(x_i^{(\alpha)},p_i)\big)\Big] \qquad (3.46)\end{aligned}$$

となる。特に、$\alpha=0$ では、$x_i^{(0)}=\frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ であり、$H_0(x_i^{(0)},p_i)$ は、H が Weyl 積で書かれているなら関数形が H と同じになる。

3.3 演算子の順序に対する Weyl の処方

この節は [4] も参考にした。

古典論での関数 $f(x,p)$ を量子力学の演算子 $F(X,P)$ にしたい。例えば、$f(x,p)=xp$ である。これを XP に置き換えると、これはエルミートではないので、$\frac{XP+PX}{2}$ とすべきである。一般に、

$$f(x,p) = \int d\xi\int d\eta\ \tilde{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta p)} \qquad (3.47)$$

の場合、

$$F(X,P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int d\xi\int d\eta\ \tilde{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi X+\eta P)} \qquad (3.48)$$

とすれば良い (Weyl の処方)。$f(x,p)$ は実数なので、

$$\tilde{f}^*(\xi,\eta)=\tilde{f}(-\xi,-\eta) \qquad (3.49)$$

であり、

$$\begin{aligned} F^{\dagger}(X,P) &\overset{\text{def}}{=} \int d\xi \int d\eta\ \tilde{f}(-\xi,-\eta)e^{-i(\xi X+\eta P)} \\ &= \int d\xi \int d\eta\ \tilde{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi X+\eta P)} \\ &= F(X,P) \end{aligned} \tag{3.50}$$

とエルミートになる。$F(X,P)$ に対して、

$$\begin{aligned} F_{\alpha}(x,p) &= \int dq\ e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|F(X,P)|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \\ &= \int d\xi \int d\eta\ \tilde{f}(\xi,\eta)E_{\alpha}^{\xi,\eta}(x,p) \\ &= \int d\xi \int d\eta\ \tilde{f}(\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta p-\alpha\xi\eta/2)} \end{aligned} \tag{3.51}$$

である。特に、$\alpha=0$ では、

$$F_0(x,p)=f(x,p). \tag{3.52}$$

$f(x,p)$ を $F(X,P)$ にする変換を $F(X,P)=\mathcal{Q}[f(x,p)]$ とかく。今、ポアソン括弧

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{3.53}$$

に対して、

$$\mathcal{Q}[\{f,g\}] = \frac{[F,G]}{i\hbar}+\mathcal{O}(\hbar) \tag{3.54}$$

を示したい。これを示すために、

$$\{f,g\}(x,p)=(\mathcal{Q}[\{f,g\}])_0(x,p)=\frac{([F,G])_0(x,p)}{i\hbar}+\mathcal{O}(\hbar) \tag{3.55}$$

を示す。まず、

$$\begin{aligned} (FG)_{\alpha}(x,p) &= \int dq\ e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|FG|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \\ &= \int dq \int dy\ e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|F|y\rangle\langle y|G|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \end{aligned} \tag{3.56}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{2\pi}\ A_{\alpha}(x,p)e^{-ipr} &= \int \frac{dp}{2\pi}\int dq\ e^{-ipr}e^{ipq}\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|A|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \\ &= \int dq\ e^{ipr}\delta(q-r)\langle x-\frac{1+\alpha}{2}q|A|x+\frac{1-\alpha}{2}q\rangle \\ &= \langle x-\frac{1+\alpha}{2}r|A|x+\frac{1-\alpha}{2}r\rangle \end{aligned} \tag{3.57}$$

つまり、

$$\langle x_1|A|x_2\rangle = \int \frac{dp}{2\pi}\ A_{\alpha}(\frac{x_1+x_2-\alpha[x_1-x_2]}{2},p)e^{ip[x_1-x_2]} \tag{3.58}$$

である。これを、(3.56) に代入して、

$$
\begin{aligned}
(FG)_\alpha(x,p) = & \int dq \int dy \int \frac{dp_1}{2\pi} \int \frac{dp_2}{2\pi}\ e^{ipq} \\
& \times F_\alpha(\frac{x-\frac{1+\alpha}{2}q+y-\alpha[x-\frac{1+\alpha}{2}q-y]}{2}, p_1) e^{ip_1[x-\frac{1+\alpha}{2}q-y]} \\
& \times G_\alpha(\frac{y+x+\frac{1-\alpha}{2}q-\alpha[y-x+\frac{1-\alpha}{2}q]}{2}, p_2) e^{ip_2[y-x-\frac{1-\alpha}{2}q]}.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

特に、$\alpha = 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
(FG)_0(x,p) = & \int dq \int dy \int \frac{dp_1}{2\pi} \int \frac{dp_2}{2\pi}\ e^{ipq} \\
& \times F_0(\frac{x+y-\frac{1}{2}q}{2}, p_1) e^{ip_1[x-y-\frac{1}{2}q]} G_0(\frac{y+x+\frac{1}{2}q}{2}, p_2) e^{ip_2[y-x-\frac{1}{2}q]}.
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

今、

$$
p_1 = p + k_1\,, \quad p_2 = p - k_2 \tag{3.61}
$$

と変換すると、

$$
\begin{aligned}
pq + p_1[x-y-\frac{1}{2}q] + p_2[y-x+\frac{1}{2}q] = & \ pq + (p+k_1)[x-y-\frac{1}{2}q] + (p-k_2)[y-x-\frac{1}{2}q] \\
= & \ k_1(x-y-\frac{1}{2}q) + k_2(x-y+\frac{1}{2}q)
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
(FG)_0(x,p) = & \int dq \int dy \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi}\ e^{i[k_1(x-y-\frac{1}{2}q)+k_2(x-y+\frac{1}{2}q)]} \\
& \times F_0(\frac{x+y-\frac{1}{2}q}{2}, p+k_1) G_0(\frac{x+y+\frac{1}{2}q}{2}, p-k_2) \\
= & \int dq \int dy \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi}\ e^{i[k_1(x-y-\frac{1}{2}q)+k_2(x-y+\frac{1}{2}q)]} \\
& \times F_0(x + \frac{y-x-\frac{1}{2}q}{2}, p+k_1) G_0(x + \frac{y-x+\frac{1}{2}q}{2}, p-k_2).
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

変数変換

$$
a = y - x - \frac{1}{2}q, \quad b = y - x + \frac{1}{2}q\ ;\ x - y - \frac{1}{2}q = -b, \quad x - y + \frac{1}{2}q = -a \tag{3.64}
$$

をして、

$$
\begin{aligned}
(FG)_0(x,p) = & \int da \int db \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi}\ e^{-i(k_1 b + k_2 a)} F_0(x+\frac{a}{2}, p+k_1) G_0(x+\frac{b}{2}, p-k_2) \\
= & \int da \int db \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi}\ e^{-i(k_1 b + k_2 a)} F_0(x+\frac{a}{2}, p) \exp\left[k_1 \overleftarrow{\partial}_p - k_2 \overrightarrow{\partial}_p\right] G_0(x+\frac{b}{2}, p)
\end{aligned} \tag{3.65}
$$

ここで、例えば、

$$
\begin{aligned}
\int db \int \frac{dk_1}{2\pi}\ e^{-ik_1 b} k_1^n f(b) = & \int db \int \frac{dk_1}{2\pi}\ i^n \frac{\partial^n e^{-ik_1 b}}{\partial b^n} f(b) \\
= & \int db \int \frac{dk_1}{2\pi}\ e^{-ik_1 b} (-i)^n \frac{\partial^n f(b)}{\partial b^n}
\end{aligned} \tag{3.66}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
(FG)_0(x,p) \;&=\; \int da \int db \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi}\; e^{-i(k_1 b + k_2 a)} \\
&\quad \times F_0(x+\frac{a}{2},p) \exp\Big[-i\partial_b \overleftarrow{\partial}_p + i\partial_a \overrightarrow{\partial}_p\Big] G_0(x+\frac{b}{2},p) \\
&= \int da \int db \int \frac{dk_1}{2\pi} \int \frac{dk_2}{2\pi}\; e^{-i(k_1 b + k_2 a)} \\
&\quad \times F_0(x+\frac{a}{2},p) \exp\Big[-\frac{i}{2}\overrightarrow{\partial}_x \overleftarrow{\partial}_p + \frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p\Big] G_0(x+\frac{b}{2},p) \\
&= \int da \int db\; \delta(a)\delta(b) F_0(x+\frac{a}{2},p) \exp\Big[-\frac{i}{2}\overrightarrow{\partial}_x \overleftarrow{\partial}_p + \frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p\Big] G_0(x+\frac{b}{2},p) \\
&= F_0(x,p) \exp\frac{i}{2}\Big[\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p - \overrightarrow{\partial}_x \overleftarrow{\partial}_p\Big] G_0(x,p). \qquad (3.67)
\end{aligned}
$$

$\hbar$ を復活させると、

$$
\begin{aligned}
(FG)_0(x,p) \;&=\; F_0(x,p) \exp\frac{i\hbar}{2}\Big[\overleftarrow{\partial}_x \overrightarrow{\partial}_p - \overrightarrow{\partial}_x \overleftarrow{\partial}_p\Big] G_0(x,p) \qquad (3.68) \\
&= f(x,p)g(x,p) + \frac{i\hbar}{2}\{f,g\} + \mathcal{O}(\hbar^2) \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\frac{([F,G])_0(x,p)}{i\hbar} \;=\; \{f,g\} + \mathcal{O}(\hbar) = (\mathcal{Q}[\{f,g\}])_0(x,p) + \mathcal{O}(\hbar). \qquad (3.70)
$$

4　一般化コヒーレント状態

この章は、[5, 6] や製作者不明のノート「有限量子多体系の集団励起-代数的視点から-」を参考にした。

4.1　一般論

Lie 群 G の Lie 代数 L を考える。生成子 t_i の交換関係は、

$$[t_i, t_j] = \sum_k c_{ij}^k t_k \tag{4.1}$$

と書ける。G のユニタリー既約表現 T[4] に属する (多くの場合最大ウェイト状態)$|0\rangle$ を選び、部分群

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{g \in G \mid T(g)|0\rangle = e^{i\phi(g)}|0\rangle\} \tag{4.3}$$

を作る。G/H は等質空間となる。G のもと g は、H の元 h と G/H の元 ξ の積で書ける：

$$g = \xi h. \tag{4.4}$$

一般化コヒーレント状態は、

$$|z\rangle = T(\xi(z))|0\rangle \quad (T(g(z))|0\rangle = |z\rangle e^{i\phi(h)}) \tag{4.5}$$

で定義される。Lie 群 G の作用は、

$$T(g)|z\rangle = e^{\alpha(z,g)}|g\cdot z\rangle \tag{4.6}$$

である。適当な規格化で、

$$\int d\mu(z)\ |z\rangle\langle z| = 1 \tag{4.7}$$

とできる。

具体的に、

$$[A_\mu^\dagger, A_\nu^\dagger] = 0 = [A_\mu, A_\nu], \tag{4.8}$$

$$[A_\mu, A_\nu^\dagger] = p_{\mu\nu} + \sum_i q_{\mu\nu}^i B_i, \tag{4.9}$$

$$[B_i, A_\mu^\dagger] = \sum_\nu r_{i\mu}^\nu A_\nu,\ [B_i, A_\mu] = \sum_\nu s_{i\mu}^\nu A_\nu, \tag{4.10}$$

$$[B_i, B_j] = \sum_k t_{ij}^k B_k \tag{4.11}$$

[4]

$$T(gg') = T(g)T(g') \tag{4.2}$$

という場合を考える。

$$A_\mu|0\rangle = 0\,, \quad B_i|0\rangle = b_i|0\rangle \quad (b_i \in \boldsymbol{C}) \tag{4.12}$$

とする。今、規格化されてない一般化コヒーレント状態を、

$$|z) \;=\; \exp(\sum_\mu z_\mu A_\mu^\dagger) \quad (z_\mu \in \boldsymbol{C}) \tag{4.13}$$

とし、

$$\mathcal{N}(z, z^*) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; (z|z), \tag{4.14}$$

$$|z\rangle \;=\; \frac{|z)}{\sqrt{\mathcal{N}(z, z^*)}} \tag{4.15}$$

と定義する。計量と不変測度の重みを、

$$g_{\mu\nu}(z, z^*) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{\partial^2 \mathcal{N}(z, z^*)}{\partial z_\mu \partial z_\nu^*}, \tag{4.16}$$

$$V \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int \prod_\mu d^2 z_\mu \; \frac{\det[g_{\mu\nu}(z, z^*)]}{\mathcal{N}(z, z^*)}, \tag{4.17}$$

$$\rho(z, z^*) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{\det[g_{\mu\nu}(z, z^*)]}{V} \tag{4.18}$$

で定義すると、

$$\int \prod_\mu d^2 z_\mu \; \rho(z, z^*)|z\rangle\langle z| = 1 \tag{4.19}$$

となる。

4.2 オリジナルのコヒーレント状態

$A_\mu = a$, $B = 1$ の場合である：

$$[a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger]\,, \quad [a, a^\dagger] = 1\,, \quad [1, a^\dagger] = 0 = [1, a]\,, \quad [1, 1] = 0. \tag{4.20}$$

また、群の要素は、

$$g = (t, \alpha) \quad (t \in \boldsymbol{R}, \quad \alpha \in \boldsymbol{C}) \tag{4.21}$$

とかけ、積は、

$$(t, \alpha)(s, \beta) = (t + s + \frac{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}{2i}, \alpha + \beta) \tag{4.22}$$

であり、ユニタリー表現は、

$$T(g) = e^{it} T(\alpha)\,, \quad T(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \tag{4.23}$$

であり、

$$T((t, \alpha))T((s, \beta)) = e^{i(t+s)+[\alpha\beta^* - \alpha^*\beta]/2} T(\alpha + \beta) \tag{4.24}$$

となる。

4.3 スピンコヒーレント状態

$A_\mu = S_-$, $B_i = S_0$ である：

$$[S_+, S_+] = 0 = [S_-, S_-] \ \ (S_+ = S_-^\dagger), \ [S_-, S_+] = -2S_0, \ [S_0, S_\pm] = \pm S_0, \ [S_0, S_0] = 0. \tag{4.25}$$

特に、

$$S_+ \ = \ S_-^\dagger \,, \quad S_\pm = S_x \pm iS_y \tag{4.26}$$

$$[S_+, S_-] \ = \ 2S_0, \tag{4.27}$$

$$[S_0, S_\pm] \ = \ \pm S_0 \tag{4.28}$$

である。この場合、$G =$SU(2), $H =$U(1), $G/H \simeq S^2$ である。基底は、

$$\boldsymbol{S}^2|J, M\rangle = J(J+1)|J, M\rangle \,, \quad S_0|J, M\rangle = M|J, M\rangle \quad (M = -J. -J+1, \cdots, J-1, J) \tag{4.29}$$

であり、

$$S_\pm|J, M\rangle = \sqrt{(J \pm M)(J \pm M + 1)}|J, M \pm 1\rangle \tag{4.30}$$

となる。$|0\rangle$ は、

$$|0\rangle = |J, -J\rangle \tag{4.31}$$

である。また、

$$\begin{aligned} |z) \ &= \ e^{zS_+}|0\rangle \quad (z_\mu \in \boldsymbol{C}), &(4.32)\\ \mathcal{N}(z, z^*) \ &= \ (z|z) = (1 + |z|)^{2J}, &(4.33)\\ |z\rangle \ &= \ (1 + |z|)^{-J} e^{zS_+}|0\rangle &(4.34)\\ &= \ T(\zeta)|0\rangle, &(4.35)\\ T(\zeta) \ &= \ e^{\zeta S_+ - \zeta^* S_-}, &(4.36)\\ \zeta \ &= \ \frac{\theta e^{-i\phi}}{2}\,, \quad z = e^{-i\phi}\tan\frac{\theta}{2} &(4.37) \end{aligned}$$

である。完全性は、

$$\int d\mu(z) \ |z\rangle\langle z| = 0\,, \quad d\mu(z) = \frac{2J+1}{\pi(1+|z|^2)^J} d^2z = \frac{2J+1}{4\pi} \sin\theta d\theta d\phi \tag{4.38}$$

となる。また、

$$\langle w|z\rangle = \Big[\frac{(1 + w^* z)^2}{(1+|w|^2)(1+|z|^2)}\Big]^J \tag{4.39}$$

である。

4.3.1 Schwinger boson

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}\,, \quad [a_i, a_j] = 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]\,, \quad i, j = +, - \tag{4.40}$$

なる 2 つの生成消滅演算子 (Schwinger boson) を使って、

$$S_+ \;=\; a_+^\dagger a_-\,, \quad S_- = a_+ a_-^\dagger\,, \quad S_0 = \frac{a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-}{2}, \tag{4.41}$$

$$\boldsymbol{S}^2 \;=\; N(N+1)\,, \quad N = \frac{a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-}{2} \tag{4.42}$$

と書ける。今、

$$a_i^\dagger a_i |n_+; n_-\rangle \;=\; n_i |n_+; n_-\rangle \tag{4.43}$$

とすると、

$$|J, M\rangle = |J+M; J-M\rangle \tag{4.44}$$

と書ける。Schwinger boson についてのコヒーレント状態を使う事で、各運動量 J の空間の状態と c 数空間表現に表わす事が出来る [6]。

参考文献

[1] 柴田 文明・有光 敏彦・番 雅司・北島 佐知子『量子と非平衡系の物理』(東京大学出版, 2009).

[2] 谷村省吾, 日本物理学会 15 年春, 21pAN12.

[3] 大貫 義郎, 柏 太郎, 鈴木 増雄『経路積分の方法』(岩波書店, 2009).

[4] 湯川 秀樹, 豊田 利幸, 高木 修二, 並木 美喜雄, 他『量子力学 1』(岩波書店,1978).

[5] 倉辻 比呂志『幾何学的量子力学』(丸善出版, 2012).

[6] 番 雅司「量子力学の位相空間表現」.