補間法

中嶋 慧

October 28, 2024

Abstract

ニュートン, ガウス, スターリング, ベッセル, エバレットの補間公式を紹介する。

Contents

1　補間法

文献 [1, 2] に基づいて補間法について解説する。主に [1] を参考にした。

1.1　差分の定義

関数 $f(x)$ の $x=a$ および $x=a\pm h, a\pm 2h, a\pm 3h$ での値が分かっているとし、

$$f_n := f(a+nh) \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3) \tag{1.1}$$

と置く。第 1 階差を、

$$\Delta^{(1)}_{n+\frac{1}{2}} := f_{n+1} - f_n \tag{1.2}$$

と定める。第 m 階差を、

$$\Delta^{(2)}_{n} := \Delta^{(1)}_{n+\frac{1}{2}} - \Delta^{(1)}_{n-\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

$$\Delta^{(3)}_{n+\frac{1}{2}} := \Delta^{(2)}_{n+1} - \Delta^{(2)}_{n}, \tag{1.4}$$

$$\Delta^{(4)}_{n} := \Delta^{(3)}_{n+\frac{1}{2}} - \Delta^{(3)}_{n-\frac{1}{2}}, \tag{1.5}$$

$$\Delta^{(5)}_{n+\frac{1}{2}} := \Delta^{(4)}_{n+1} - \Delta^{(4)}_{n}, \tag{1.6}$$

$$\Delta^{(6)}_{n} := \Delta^{(5)}_{n+\frac{1}{2}} - \Delta^{(5)}_{n-\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

で定義する。第 1 階差の計算には 2 点での値が、第 m 階差の計算には $(m+1)$ 点での値が必要である。また、

$$\Delta^{(1)}_{0} := \frac{1}{2}(\Delta^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}}), \tag{1.8}$$

$$\Delta^{(3)}_{0} := \frac{1}{2}(\Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}}), \tag{1.9}$$

$$\Delta^{(5)}_{0} := \frac{1}{2}(\Delta^{(5)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}}) \tag{1.10}$$

とする。また、

$$\Delta^{(2)}_{\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(\Delta^{(2)}_{0} + \Delta^{(2)}_{1}), \tag{1.11}$$

$$\Delta^{(4)}_{\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(\Delta^{(4)}_{0} + \Delta^{(4)}_{1}), \tag{1.12}$$

とする。

1.2　ラグランジュの補間公式

$x=x_i$ での $f(x)$ の値を y_i とする。$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ は等間隔である必要はない。$x=x_i$ で $\tilde{f}(x_i)=y_i$ となる n 次の多項式が存在する：

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Big[\prod_{j(\neq i)} (x-x_j)\Big] \Big/ \prod_{j(\neq i)} (x_i - x_j). \tag{1.13}$$

これをラグランジュの補間公式という。

1.3 ニュートンの補間公式

$x_i = a + ih\ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ の場合は、ラグランジュの補間公式は、

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{N}}(a+hx) = f_0 &+ x\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^{(2)}_{1} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^{(3)}_{\frac{3}{2}} \\ &+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\Delta^{(4)}_{2} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!}\Delta^{(5)}_{\frac{5}{2}} \\ &+ \cdots + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n+1)}{n!}\Delta^{(n)}_{n/2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

である。これをニュートンの補間公式という。

1.4 ガウスの補間公式

ニュートンの補間公式では使われる階差が斜め下に順に取られる。これは不便なことも多い。$x = a$ および $x = a \pm h, a \pm 2h, a \pm 3h$ での値が分かっているとする。この場合に、ニュートンの補間公式を書き直したい。まず、

$$\Delta^{(2)}_{1} = \Delta^{(2)}_{0} + \Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}}, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(3)}_{\frac{3}{2}} &= \Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} + \Delta^{(4)}_{1} \\ &= \Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} + \Delta^{(4)}_{0} + \Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\Delta^{(4)}_{2} = \Delta^{(4)}_{0} + 2\Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}} + \Delta^{(6)}_{1}, \tag{1.17}$$

$$\Delta^{(5)}_{\frac{5}{2}} = \Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}} + 2\Delta^{(6)}_{1} + \Delta^{(7)}_{\frac{3}{2}} \tag{1.18}$$

である。これを $n = 5$ の場合の (1.14) に代入し、第 6 階と第 7 階の階差を 0 で近似して、

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{G},+}(a+hx) = f_0 &+ x\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^{(2)}_{0} + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}\Delta^{(4)}_{0} + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!}\Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.19}$$

を得る。更に、

$$\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \Delta^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(2)}_{0}, \tag{1.20}$$

$$\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} = \Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(4)}_{0}, \tag{1.21}$$

$$\Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}} = \Delta^{(5)}_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{(6)}_{0}, \tag{1.22}$$

と $\Delta^{(6)}_{0} = 0$ を (1.19) に代入して、

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{G},-}(a+hx) = f_0 &+ x\Delta^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{(x+1)x}{2!}\Delta^{(2)}_{0} + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{4!}\Delta^{(4)}_{0} + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!}\Delta^{(5)}_{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.23}$$

を得る。(1.19), (1.23) をガウスの補間公式 (ニュートン・ガウスの補間公式) という。

1.5　スターリングの補間公式

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{S}}(a+hx) &= \frac{1}{2}[f_{\mathrm{G},-}(a+hx)+f_{\mathrm{G},+}(a+hx)] \\
&= f_0 + x\Delta_0^{(1)} + \frac{x^2}{2!}\Delta_0^{(2)} + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\Delta_0^{(3)} \\
&\quad + \frac{(x+1)x^2(x-1)}{4!}\Delta_0^{(4)} + \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!}\Delta_0^{(5)} \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

をスターリングの補間公式という。

1.6　ベッセルの補間公式

ベッセルの補間公式では、すべて $x = a + \frac{1}{2}h$ における階差を使う。(1.19) に、

$$
\Delta_0^{(2)} = \Delta_{\frac{1}{2}}^{(2)} - \frac{1}{2}\Delta_{\frac{1}{2}}^{(3)}, \qquad (1.25)
$$

$$
\Delta_0^{(4)} = \Delta_{\frac{1}{2}}^{(4)} - \frac{1}{2}\Delta_{\frac{1}{2}}^{(5)} \qquad (1.26)
$$

を代入して、

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{B}}(a+hx) &= f_0 + x\Delta_{\frac{1}{2}}^{(1)} + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta_{\frac{1}{2}}^{(2)} + \frac{x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{3!}\Delta_{\frac{1}{2}}^{(3)} \\
&\quad + \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4!}\Delta_{\frac{1}{2}}^{(4)} + \frac{(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2)}{5!}\Delta_{\frac{1}{2}}^{(5)} \qquad (1.27)
\end{aligned}
$$

を得る。これは $x = \frac{1}{2}$ 付近で優れている。

1.7　エバレットの補間公式

ベッセルの補間公式を、

$$
f_{\mathrm{B}}(a+hx) = f_0 + x\Delta_{\frac{1}{2}}^{(1)} + B_2\Delta_{\frac{1}{2}}^{(2)} + B_3\Delta_{\frac{1}{2}}^{(3)} + B_4\Delta_{\frac{1}{2}}^{(4)} + B_5\Delta_{\frac{1}{2}}^{(5)} \qquad (1.28)
$$

と書くと、

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{B}}(a+hx) &= f_0 + x\Delta_{\frac{1}{2}}^{(1)} + B_2\frac{\Delta_0^{(2)}+\Delta_1^{(2)}}{2} + B_3(\Delta_1^{(2)}-\Delta_0^{(2)}) + B_4\frac{\Delta_0^{(4)}+\Delta_1^{(4)}}{2} \\
&\quad + B_5(\Delta_1^{(4)}-\Delta_0^{(4)}) \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

である。これより、

$$f_{\mathrm{E}}(a+hx) = f_0 + x\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + E^{(0)}_2\Delta^{(2)}_0 + E^{(1)}_2\Delta^{(2)}_1 + E^{(0)}_4\Delta^{(4)}_0 + E^{(1)}_4\Delta^{(4)}_1, \tag{1.30}$$

$$E^{(0)}_2 := \frac{1}{2}B_2 - B_3 = -\frac{(x-2)(x-1)x}{6}, \tag{1.31}$$

$$E^{(1)}_2 := \frac{1}{2}B_2 + B_3 = \frac{(x-1)x(x+1)}{6}, \tag{1.32}$$

$$E^{(0)}_4 := \frac{1}{2}B_4 - B_5 = -\frac{(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)}{120}, \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} E^{(1)}_4 &:= \frac{1}{2}B_4 + B_5 = \frac{x(4-5x^2+x^4)}{120} \\ &= -\frac{(y-3)(y-2)(y-1)y(y+1)}{120} \quad (x = 1-y) \end{aligned} \tag{1.34}$$

を得る。これをエバレットの補間公式という[1)] 。

いま、

$$f_{\mathrm{N}}(a+hx) = f_0 + x\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + N_2\Delta^{(2)}_1 + N_3\Delta^{(3)}_{\frac{3}{2}} + N_4\Delta^{(4)}_2 + N_5\Delta^{(5)}_{\frac{5}{2}}, \tag{1.35}$$

$$f_{\mathrm{G},+}(a+hx) = f_0 + x\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + G_2\Delta^{(2)}_0 + G_3\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} + G_4\Delta^{(4)}_0 + G_5\Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}}, \tag{1.36}$$

$$f_{\mathrm{S}}(a+hx) = f_0 + x\Delta^{(1)}_0 + S_2\Delta^{(2)}_0 + S_3\Delta^{(3)}_0 + S_4\Delta^{(4)}_0 + S_5\Delta^{(5)}_0, \tag{1.37}$$

$$f_{\mathrm{B}}(a+hx) = f_0 + x\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + B_2\Delta^{(2)}_{\frac{1}{2}} + B_3\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} + B_4\Delta^{(4)}_{\frac{1}{2}} + B_5\Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}} \tag{1.38}$$

と書くと、

$$G_2 = N_2, \quad G_3 = S_3, \quad G_4 = B_4, \quad G_5 = S_5 \tag{1.39}$$

であり、

$$f_{\mathrm{G},-}(a-hx) = f_0 - x\Delta^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + G_2\Delta^{(2)}_0 - G_3\Delta^{(3)}_{-\frac{1}{2}} + G_4\Delta^{(4)}_0 - G_5\Delta^{(5)}_{-\frac{1}{2}} \tag{1.40}$$

である。

図 1 にガウスの補間公式とスターリングの補間公式の例を示す。

2　数値微分

スターリングの補間公式より、

$$f'_{\mathrm{S}}(a) = \frac{1}{h}\Big[\Delta^{(1)}_0 - \frac{1}{6}\Delta^{(3)}_0 + \frac{1}{30}\Delta^{(5)}_0 - \frac{1}{140}\Delta^{(7)}_0 + \cdots\Big], \tag{2.1}$$

$$f^{(2)}_{\mathrm{S}}(a) = \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^{(2)}_0 - \frac{1}{12}\Delta^{(4)}_0 + \frac{1}{90}\Delta^{(6)}_0 + \cdots\Big], \tag{2.2}$$

$$f^{(3)}_{\mathrm{S}}(a) = \frac{1}{h^3}\Big[\Delta^{(3)}_0 - \frac{1}{4}\Delta^{(5)}_0 + \frac{7}{120}\Delta^{(7)}_0 + \cdots\Big] \tag{2.3}$$

[1)] 3 階以上の奇数回階差は現れないのが特徴である。奇数回階差が現れないようにしたものをラプラス・エバレットの補間公式という。

を得る。(2.1) は、公式

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{-f_{-1}+f_1}{2h} + O(h^2) \\
&= \frac{f_{-2}-8f_{-1}+8f_1-f_2}{12h} + O(h^4) \\
&= \frac{-f_{-3}+9f_{-2}-45f_{-1}+45f_1-9f_2+f_3}{60h} + O(h^6)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

と整合している。

また、ベッセルの補間公式より、

$$
f'_{\mathrm{B}}(a) = \frac{1}{h}\Big[\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta^{(2)}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}\Delta^{(4)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{120}\Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}} + \cdots\Big], \tag{2.5}
$$

$$
f^{(2)}_{\mathrm{B}}(a) = \frac{1}{h^2}\Big[\Delta^{(2)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}\Delta^{(4)}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{24}\Delta^{(5)}_{\frac{1}{2}} + \cdots\Big], \tag{2.6}
$$

$$
f^{(3)}_{\mathrm{B}}(a) = \frac{1}{h^3}\Big[\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta^{(4)}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\Delta^{(6)}_{\frac{1}{2}} + \cdots\Big] \tag{2.7}
$$

を得る。

3 数値積分

ベッセルの補間公式を $x = a$ から積分し、

$$
\int_a^{a+rh} dx\ f_{\mathrm{B}}(x) = h\Big[f(a) + \frac{r^2}{2}\Delta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{r^3}{6} - \frac{r^2}{4}\Big)\Delta^{(2)}_{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{r^4}{24} - \frac{r^3}{12} + \frac{r^2}{24}\Big)\Delta^{(3)}_{\frac{1}{2}} + \cdots\Big] \tag{3.1}
$$

を得る。特に、第 2 階差が一定の時は、$r = 2$ として、

$$
\int_a^{a+2h} dx\ f(x) = \frac{h}{3}\Big[f(a+2h) + 4f(a+h) + f(a)\Big] \tag{3.2}
$$

となり、これはシンプソン公式である。

スターリングの補間公式を $[a-h, a+h]$ で積分して、

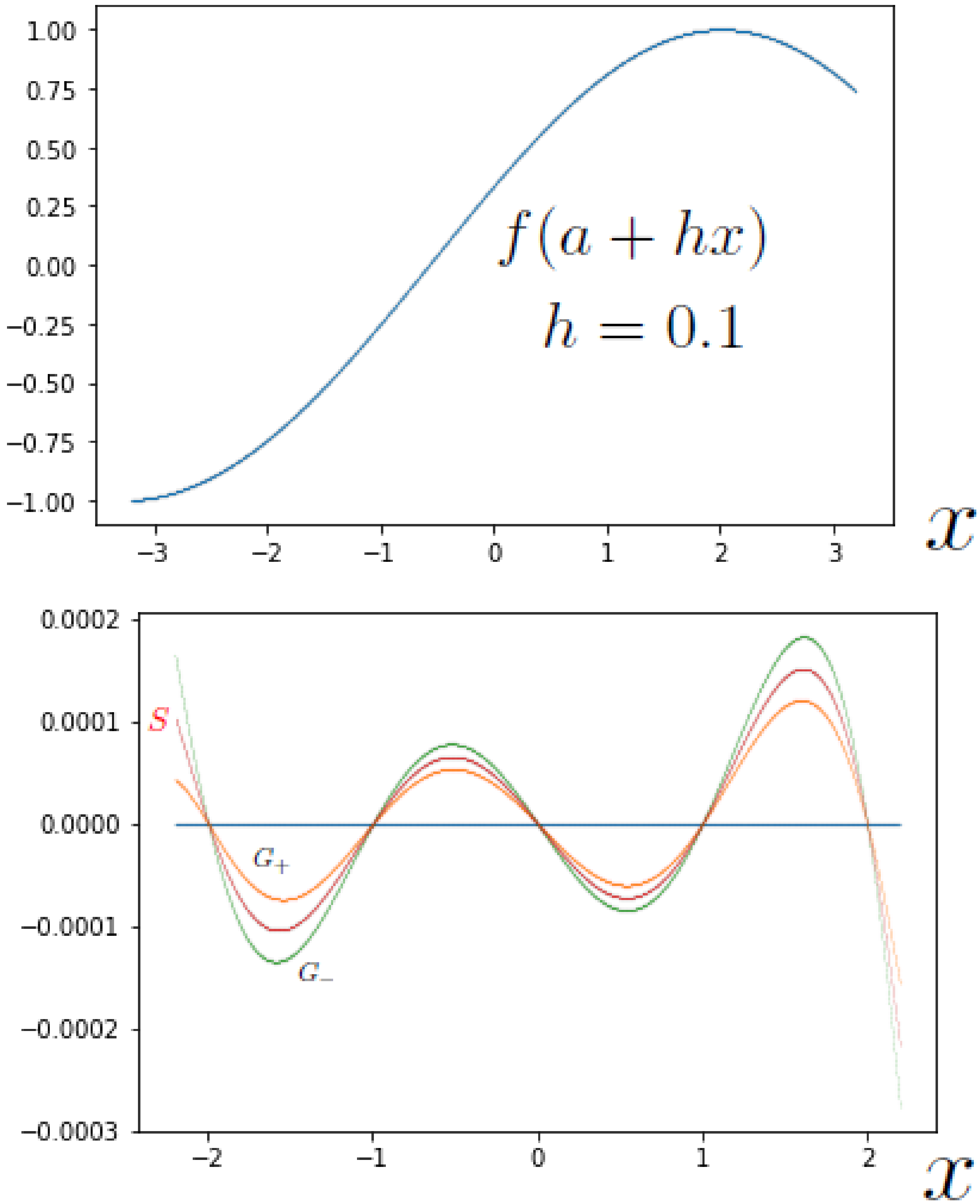
$$
\int_{a-h}^{a+h} dx\ f_{\mathrm{S}}(x) = 2h\Big[f(a) + \frac{1}{6}\Delta^{(2)}_0 - \frac{1}{180}\Delta^{(4)}_0 + \frac{1}{1512}\Delta^{(6)}_0 + \cdots\Big] \tag{3.3}
$$

を得る。

References

[1] 渡邊敏夫『數理天文學』(増訂新版) 恒星社厚生閣, 1959 年.

[2] C. R. ワイリー (著), 富久泰明 (翻訳)『工業数学 上』ブレイン図書出版, 1973 年.



$$G_+ := f_{\mathrm{G},+}(a+hx) - f(a+hx)$$

$$G_- := f_{\mathrm{G},-}(a+hx) - f(a+hx)$$

$$S := f_{\mathrm{S}}(a+hx) - f(a+hx)$$

Figure 1: ガウスの補間公式とスターリングの補間公式