線形リー群について

中嶋 慧

July 25, 2019

Contents

1 線形リー群とリー代数

複素数の行列要素を持つ N 次正方行列の全体を $\mathrm{M}(N,\mathbb{C})$ と書く。$\mathrm{M}(N,\mathbb{C})$ のうち、行列式が 0 でないもの全体を $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ と書く。$\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ の閉部分群を線形リー群と言う。G を線形リー群とする。リー代数 $\mathfrak{g}$ を、

$$\mathfrak{g}=\{X\in\mathrm{M}(N,\mathbb{C})|^\forall a\in\mathbb{R},\ \exp(aX)\in G\} \tag{1.1}$$

で定義する。$\mathfrak{g}$ の任意の元 A, B について、

$$aA\in\mathfrak{g}\ (a\in\mathbb{R}),\quad A+B\in\mathfrak{g},\quad [A,B]\overset{\mathrm{def}}{=}AB-BA\in\mathfrak{g} \tag{1.2}$$

となる。$\{\boldsymbol{G}_r\}_{r=1}^n$ をリー代数の基底とすると、$\mathfrak{g}$ の任意 X は、実数 c^r を用いて、$X=c^r\boldsymbol{G}_r$ と一意的に書ける。$\boldsymbol{G}_r$ をリー群 G の生成子ともいう。n はリー群の次元である。

$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ を線形リー群の元とすると、単位元の近くで、

$$\boldsymbol{T}(\varepsilon)=\exp[\varepsilon^r\boldsymbol{G}_r] \tag{1.3}$$

と書ける [2]。ε^r は実パラメーターである。すべての r に対して $\varepsilon^r = 0$ のときが単位元となる。コンパクト (パラメーターの範囲が有限) で連結な線形リー群[1)]の任意の元は、この形で書ける [2] が、一般には、この形で書けるとは限らない[2)]。

2　構造定数

線形リー群 G は n 次元多様体である (この多様体を $\tilde{G}$ と書く。$G = \tilde{G}$ である[3)])。$\tilde{G}$ の任意の点 P は G の元 $\boldsymbol{T}(P)$ と対応し、$\tilde{G}$ の任意の 2 点 P, Q に対して、$\boldsymbol{T}(R) = \boldsymbol{T}(P)\boldsymbol{T}(Q)$ となる $\tilde{G}$ の点 R が 1 つ存在する。$\tilde{G}$ は局所的には、n 個の実パラメーター $\{\varepsilon^r\}_{r=1}^n$ で表されるが、$\tilde{G}$ を 1 つの座標系 $\{\varepsilon^r\}_{r=1}^n$ で表せるとは限らない。例えば、$\boldsymbol{T}(P)$, $\boldsymbol{T}(Q)$ が (1.3) の形で書けても、$\boldsymbol{T}(P)\boldsymbol{T}(Q)$ が (1.3) の形で書けるとは限らない。

ここでは、$P, Q \in \tilde{G}$ と $\boldsymbol{T}(R) = \boldsymbol{T}(P)\boldsymbol{T}(Q)$ で決まる $R \in \tilde{G}$ とが同じ座標系で表せる場合を考える[4)] 。この座標系は原点 O(すなわち、$\boldsymbol{T}(O) = 1$(単位元) となる点) を含むとする。P, Q, R の座標を a, b, c とすると、

$$\boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{T}(a)\boldsymbol{T}(b) \tag{2.1}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{T}(a) = \boldsymbol{T}(P)$ などである。$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ は ε^r について任意の階数まで微分可能とする。原点 O の座標は 0 である。c は a, b の関数であり、

$$c^r = f^r(a, b) \tag{2.2}$$

とかく。$f^r(a, b)$ は以下の性質を持つ：

$$f^r(a, f(b, c)) = f^r(f(a, b), c), \tag{2.3}$$

$$f^r(a, 0) = f^r(0, a) = a^r. \tag{2.4}$$

また、$f^r(a, b)$ は a, b について任意の階数まで連続微分可能とする。

ここで、特に、$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ が (1.3) の形だとする。(2.1) を a^r, b^s で微分した後、a, b をすべて 0 と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}(c)}{\partial c^k \partial c^l}\Big|_{c=0} \frac{\partial f^l(a,b)}{\partial a^r}\Big|_{a,b=0} \frac{\partial f^k(a,b)}{\partial b^s}\Big|_{a,b=0} & \\ + \frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^r \partial b^s}\Big|_{a,b=0} \boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}_r \boldsymbol{G}_s &\end{aligned} \tag{2.5}$$

を得る。ここで、(1.3) より、

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^r}\Big|_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{G}_r \tag{2.6}$$

[1)] U(n), SU(n), SO(n), Sp(n) は連結なコンパクト群である [2]。
[2)] 線形リー群の元は一般には (6.6) の形で書ける。
[3)] つまり、G と $\tilde{G}$ とは 1 対 1 で対応し、同一視できる。
[4)] 単位元の近くに限定すれば、これは可能である。

であることを用いた。(2.4) より、

$$\frac{\partial f^l(a,b)}{\partial a^r}\Big|_{b=0} = \delta^l_r, \quad \frac{\partial f^k(a,b)}{\partial b^s}\Big|_{a=0} = \delta^k_s \tag{2.7}$$

なので、(2.5) は、

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{T}(c)}{\partial c^r \partial c^s}\Big|_{c=0} + \frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^r \partial b^s}\Big|_{a,b=0}\boldsymbol{G}_p = \boldsymbol{G}_r\boldsymbol{G}_s \tag{2.8}$$

となる。r, s を入れ換えた式との差を計算して、

$$[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s] = \boldsymbol{G}_r\boldsymbol{G}_s - \boldsymbol{G}_s\boldsymbol{G}_r = f^p{}_{rs}\boldsymbol{G}_p, \tag{2.9}$$

$$f^p{}_{rs} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^r \partial b^s}\Big|_{a,b=0} - \frac{\partial^2 f^p(a,b)}{\partial a^s \partial b^r}\Big|_{a,b=0} \tag{2.10}$$

となる。$f^p{}_{rs}$ は構造定数と呼ばれる実数である。$f^p{}_{rs}$ は、パラメーターの結合則を表す関数 $f^p(a,b)$ により完全に決定される。パラメーターの取り方を変えると、$f^p(a,b)$ や構造定数, 基底 $\boldsymbol{G}_r$ も変化する。

3　ゲージ場の変換則：$\partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$ について

この節は [1] を参考にした。

$A^r{}_\mu$ をゲージ場とすると、

$$\boldsymbol{A}_\mu \overset{\text{def}}{=} A^r{}_\mu \boldsymbol{G}_r \tag{3.1}$$

は、次のように変換される：

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}. \tag{3.2}$$

以下では、$\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$ について調べる。

(2.1) を a^r で微分して、$a^r = 0$ と置くと、

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}(c)}{\partial c^s}\Big|_{a=0}\frac{\partial f^s(a,b)}{\partial a^r}\Big|_{a=0} = \boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}(b) \tag{3.3}$$

となる[5)] 。今、

$$f_r{}^s(a,b) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f^s(a,b)}{\partial a^r}, \tag{3.4}$$

$$L^s{}_r(b) \overset{\text{def}}{=} f_r{}^s(0,b) \tag{3.5}$$

とすると、(3.3) は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}(b)}{\partial b^s}L^s{}_r(b) = \boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}(b) \tag{3.6}$$

---

5)線形リー群 G が連結成分の組 $\{G_i\}$ からなり、各 G_i の任意の元は 1 つの座標 $a = \{a^r\}^n_{r=1}$ で表される場合を考える。このとき、$\tilde{a} \overset{\text{def}}{=} (a,i)$ で G の任意の元を表すことが出来る。この場合は、(3.3) から (4.10) まで、a, b, c を $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ の意味で理解すれば良い。

となる。ところで、${L^s}_r(b)$ の逆行列 ${(L^{-1})^r}_s(b)$ の存在は、次のようにして分かる。(2.3) を a^s で微分して、

$$
{f_s}^r(a, f(b,c)) = {f_t}^r(f(a,b), c){f_s}^t(a,b) \tag{3.7}
$$

を得る。(3.7) で $a = 0$ と置くと、

$$
{L^r}_s(f(b,c)) = {f_t}^r(b,c){L^t}_s(b) \tag{3.8}
$$

となる。今、$[\boldsymbol{T}(b)]^{-1} = \boldsymbol{T}(b^{-1})$ で、b^{-1} を定義する。このとき、$f^r(b, b^{-1}) = 0$ である。上式で、$c = b^{-1}$ とすると、

$$
\delta^r_s = {f_t}^r(b, b^{-1}){L^t}_s(b) \tag{3.9}
$$

を得る。ここで、

$$
\begin{aligned}
{L^r}_s(0) &= \frac{\partial f^s(a,b)}{\partial a^r}\Big|_{a=0,b=0} \\
&= \frac{\partial f^s(a,0)}{\partial a^r}\Big|_{a=0} = \frac{\partial a^s}{\partial a^r}\Big|_{a=0} = \delta^r_s
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

を用いた。(3.9) より、

$$
{(L^{-1})^r}_t(b) = {f_t}^r(b, b^{-1}) \tag{3.11}
$$

を得る。よって、(3.6) より、

$$
\frac{\partial \boldsymbol{T}(b)}{\partial b^s}\boldsymbol{T}^{-1}(b) = \boldsymbol{G}_r{(L^{-1})^r}_s(b) \tag{3.12}
$$

を得る。これより、

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \boldsymbol{T}(\varepsilon(x)) \cdot \boldsymbol{T}^{-1}(\varepsilon(x)) &= \partial_\mu \varepsilon^s(x) \frac{\partial \boldsymbol{T}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^s}\boldsymbol{T}^{-1}(\varepsilon) \\
&= \boldsymbol{G}_r{(L^{-1})^r}_s(\varepsilon(x))\partial_\mu \varepsilon^s(x)
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

を得る。

4　リー群の随伴表現

　$X \in G,\ A \in \mathfrak{g}$ とすると、

$$
Xe^A X^{-1} = e^{XAX^{-1}} \in G \tag{4.1}
$$

なので、

$$
XAX^{-1} \in \mathfrak{g} \tag{4.2}
$$

である。特に、$X\boldsymbol{G}_r X^{-1} \in \mathfrak{g}$ なので、

$$
X\boldsymbol{G}_r X^{-1} = {[\mathrm{Ad}(X)]^s}_r \boldsymbol{G}_r \tag{4.3}
$$

と書ける。$[\mathrm{Ad}(X)]^s{}_r$ は実数である。Ad は群 G の表現となる。これは G の随伴表現と呼ばれる。
この節の以下は [1] を参考にした。
以下で、

$$[\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}(a))]^r{}_s = (L^{-1})^r{}_t(a)R^t{}_s(a) \tag{4.4}$$

を示そう。ここで、

$$R^r{}_s(a) \overset{\mathrm{def}}{=} f^r{}_s(a,0), \tag{4.5}$$

$$f^r{}_s(a,b) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{f^r(a,b)}{\partial b^s} \tag{4.6}$$

である。まず、

$$c^r \overset{\mathrm{def}}{=} f^r(f(a,b),a^{-1}) \tag{4.7}$$

とすると、

$$\boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{T}(a)\boldsymbol{T}(b)\boldsymbol{T}^{-1}(a) \tag{4.8}$$

である。$\boldsymbol{T}(a^{-1}) = \boldsymbol{T}^{-1}(a)$ を用いた。上式を b^s で微分して、

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}(c)}{\partial c^r} f_t{}^r(f(a,b),a^{-1}) f^t{}_s(a,b) = \boldsymbol{T}(a)\frac{\partial \boldsymbol{T}(b)}{\partial b^s}\boldsymbol{T}^{-1}(a) \tag{4.9}$$

となる。$b=0$ とすると、$c^r=0$ となるので、

$$\boldsymbol{G}_r f_t{}^r(a,a^{-1})R^t{}_s(a) = \boldsymbol{T}(a)\boldsymbol{G}_s\boldsymbol{T}^{-1}(a) \tag{4.10}$$

となる。上式と (3.11) より、(4.4) を得る。

5 リー代数の随伴表現

今、$X \in G$ が実数 s を用いて、

$$X = e^{sB} \tag{5.1}$$

と書けるとする。このとき、

$$\mathrm{Ad}(X) =: \exp(s\cdot \mathrm{ad}(B)) \tag{5.2}$$

で行列 $\mathrm{ad}(B)$ を定める。定義より、

$$e^{sB}\boldsymbol{G}_r e^{-sB} = \boldsymbol{G}_s[\exp(s\cdot \mathrm{ad}(B))]^s{}_r \tag{5.3}$$

である。s で微分した後に $s=0$ と置いて、

$$[B,\boldsymbol{G}_r] = \boldsymbol{G}_t[\mathrm{ad}(B)]^t{}_r \tag{5.4}$$

を得る。よって、ad は線形写像であり、

$$\mathrm{ad}(\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r) = \varepsilon^r \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r) \tag{5.5}$$

である。$\mathrm{ad}(B)$ はリー代数の随伴表現と呼ばれる。(5.4) で $B = \boldsymbol{G}_s$ として、

$$({f^t}_{sr}\boldsymbol{G}_t =)[\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{G}_r] = \boldsymbol{G}_t[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)]^t{}_r, \tag{5.6}$$

すなわち、

$$[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)]^t{}_r = {f^t}_{sr} \tag{5.7}$$

を得る。

$\boldsymbol{T} \in G$ が、$\boldsymbol{T} = \exp(\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r)$ と書けるとき、

$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) = \exp(\varepsilon^r \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)) \tag{5.8}$$

である。よって、

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1} = [\exp(\boldsymbol{e})]^s{}_r \boldsymbol{G}_s\,, \quad \boldsymbol{e} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon^r \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r) \tag{5.9}$$

となる。

6　$\partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}$ について：その 2

$\boldsymbol{E} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varepsilon^r \boldsymbol{G}_r$ と置く。$\boldsymbol{T} \in G$ が、$\boldsymbol{T} = e^{\boldsymbol{E}}$ と書けるとき、

$$\partial_\mu \boldsymbol{T} = \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}} \partial_\mu \boldsymbol{E} e^{(1-s)\boldsymbol{E}} \tag{6.1}$$

となる。ここで、公式

$$\frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial \alpha^n} = \int_0^1 ds\ e^{sH(\alpha)} \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha^n} e^{(1-s)H(\alpha)} \tag{6.2}$$

を用いた。$\alpha = \{\alpha^n\}$ はパラメーター α^n の組である[6)]。

[6)](6.2) は次のように示される。今、

$$C(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-xH(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha^n} e^{xH(\alpha)}$$

と置くと、$C(0) = 0$ であり、$C(x)$ は、

$$\frac{dC(x)}{dx} = e^{-xH(\alpha)} \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha^n} e^{xH(\alpha)}$$

を満たす。上式を $x = 0$ から $x = 1$ まで積分して、

$$C(1) = e^{-H(\alpha)} \frac{\partial e^{H(\alpha)}}{\partial \alpha^n} = \int_0^1 dx\ e^{-xH(\alpha)} \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha^n} e^{xH(\alpha)}$$

を得る。これに左から $e^{H(\alpha)}$ をかけて (6.2) を得る。

(6.1) より、

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} &= \int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\partial_\mu\boldsymbol{E}e^{-s\boldsymbol{E}} \\
&= \partial_\mu\varepsilon^r\int_0^1 ds\ e^{s\boldsymbol{E}}\boldsymbol{G}_r e^{-s\boldsymbol{E}} \\
&= \partial_\mu\varepsilon^r\boldsymbol{G}_s\int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^s{}_r =: \partial_\mu\varepsilon^r\boldsymbol{G}_s l^s{}_r(\boldsymbol{e}) \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$l^s{}_r(\boldsymbol{e}) = \int_0^1 ds\ [\exp(s\boldsymbol{e})]^s{}_r = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}[\boldsymbol{e}^n]^s{}_r \qquad (6.4)$$

である。

$\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ が $\boldsymbol{T}=e^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{E}\in\mathfrak{g})$ の形で書けない場合を考える。まず、線形リー群の連結成分について復習する。集合 A の 2 元 a,b が結ばれているとは、a を始点, b を終点とする、A に含まれる連続曲線が存在することである。A の元 a と A 内で結ばれている元の集合を $C(a)$ と書き、a を含む連結成分という。線形リー群 G の単位元を含む連結成分を G_0 とする。このとき、G の元 g を含む連結成分 $C(g)$ は、$C(g)=gG_0=G_0g$ と書ける [2, 3]。また、G_0 の任意の元 $\boldsymbol{T}_0$ は、G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の有限個の元 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_n$ を用いて、

$$\boldsymbol{T}_0 = \exp(\boldsymbol{E}_1)\exp(\boldsymbol{E}_2)\cdots\exp(\boldsymbol{E}_n) \qquad (6.5)$$

と書ける [2, 3]。上の 2 つの定理より、$\boldsymbol{T}(x)$(x は時空の座標[7]) が G のある連結成分 G_i の元のとき、G_i の x に依らない元 $\boldsymbol{T}_i$ と、G_0 の元 $\boldsymbol{T}_0(x)$ が存在し、

$$\boldsymbol{T}(x) = \boldsymbol{T}_0(x)\boldsymbol{T}_i, \qquad (6.6)$$

$$\boldsymbol{T}_0(x) = \exp(\boldsymbol{E}_1(x))\exp(\boldsymbol{E}_2(x))\cdots\exp(\boldsymbol{E}_n(x)) \qquad (6.7)$$

と書ける。特に、$G_i=G_0$ のとき、$\boldsymbol{T}_i=1$(単位元) である。さて、$\boldsymbol{E}_k(x)=\varepsilon^r_{(k)}(x)\boldsymbol{G}_r$ と書くと、(6.3) より、

$$\partial_\mu e^{\boldsymbol{E}_k(x)}\cdot e^{-\boldsymbol{E}_k(x)} = (\alpha^{(k)}(x))^r{}_s\boldsymbol{G}_r\partial_\mu\varepsilon^s_{(k)} \qquad (6.8)$$

と書ける。$(\alpha^{(k)}(x))^r{}_s$ は実数である。また、(4.2) であるから、(6.6) より、

$$\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \sum_{k=1}^{n}(\beta^{(k)}(x))^r{}_s\boldsymbol{G}_r\partial_\mu\varepsilon^s_{(k)} \qquad (6.9)$$

となる。$(\beta^{(k)}(x))^r{}_s$ は実数である。よって、$\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$ は $\boldsymbol{G}_r$ の線形結合で書ける。

[7] より一般には、x がある多様体の座標でも良い。

7　構造定数の完全反対称性

ヤコビ恒等式

$$[[\boldsymbol{G}_r, \boldsymbol{G}_s], \boldsymbol{G}_t] + [[\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{G}_t], \boldsymbol{G}_r] + [[\boldsymbol{G}_t, \boldsymbol{G}_r], \boldsymbol{G}_s] = 0 \tag{7.1}$$

より、

$$f^p{}_{rs} f^q{}_{pt} + f^p{}_{st} f^q{}_{pr} + f^p{}_{tr} f^q{}_{ps} = 0 \tag{7.2}$$

を得る。これと (5.7) より、

$$[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)] = \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_t) f^t{}_{sr} \tag{7.3}$$

を得る。これは、$\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)$ がリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現であることを表す。

(7.3) に $\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u)$ をかけてトレースを取ると、

$$\mathrm{Tr}\Big([\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)]\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u)\Big) = -\kappa_{tu} f^t{}_{sr} \tag{7.4}$$

である。$\kappa_{rs} \stackrel{\mathrm{def}}{=} -f^u{}_{rv} f^v{}_{su} (= \kappa_{sr})$ は Killing 形式である。上式の左辺は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\Big([\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)]\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u)\Big) &= \mathrm{Tr}\Big(\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)[\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_u), \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_s)]\Big) \\
&= \mathrm{Tr}\Big(\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_t)\Big) f^t{}_{us} \\
&= -\kappa_{rt} f^t{}_{us}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

なので、

$$\kappa_{rt} f^t{}_{us} = \kappa_{tu} f^t{}_{sr} \tag{7.6}$$

を得る。$f_{abc} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \kappa_{ra} f^r{}_{bc}$ とすると、上式は、

$$f_{rus} = f_{usr} = -f_{urs} \tag{7.7}$$

を意味する。これより、f_{abc} は完全反対称である。

References

[1] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987 年).

[2] 佐藤光『群と物理』(丸善出版, 2016 年).

[3] 山内恭彦, 杉浦光夫『連続群論入門』(培風館, 1960 年).