

近日点移動

中嶋 慧

November 8, 2019

Abstract

この記事では、一般相対論による近日点移動について述べる。アインシュタイン方程式を近似なしで解いた場合の近日点の歳差を δ_{GR} とし、アインシュタイン方程式の1次近似で解いた場合のそれを $\delta_{(1)}$ とすると、

$$\delta_{(1)} = \frac{4}{3}\delta_{\text{GR}}$$

となる事を示す。

Contents

1	星の周りの粒子の軌道	1
1.1	球対称, 静的な場合の一般論	1
1.2	PPN パラメーター	5
1.3	最低次の近似とその補正	6
1.4	最低次のアインシュタイン方程式の解	6

1 星の周りの粒子の軌道

光速度 c を 1 とする。

球対称, 静的な場合を考える。

1.1 球対称, 静的な場合の一般論

計量テンソルを

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (1.1)$$

と書く。質点の運動方程式は、

$$\frac{d}{d\tau} \left[(\eta_{\sigma\nu} + h_{\sigma\nu}) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right] = \frac{1}{2} \partial_\nu h_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (1.2)$$

である。ここで、 τ は固有時である。今、

$$h_{\mu\nu} = \text{diag}(h_0, h_s, h_s, h_s) \quad (1.3)$$

とする。(1.2) の空間成分 ($i = 1, 2, 3$) は、

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 + h_s) \dot{x}^i \right] = \frac{1}{2} \left[\partial_i h_0 \dot{t}^2 + \partial_i h_s (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] \quad (1.4)$$

となる。ここで、 $\dot{X} := dX/d\tau$, $t = x^0$ である。(1.2) の時間成分は、

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 - h_0) \dot{t} \right] = 0 \quad (1.5)$$

となる。ここで、

$$\partial_0 h_{\mu\nu} = 0 \quad (1.6)$$

を仮定した。

さて、

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1 \quad (1.7)$$

である。今の場合、

$$(1 - h_0) \dot{t}^2 - (1 + h_s) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1 \quad (1.8)$$

である。

(1.5) より、

$$(1 - h_0) \dot{t} = K = \text{const.} \quad (1.9)$$

である。これと (1.8) より、

$$\frac{K^2}{1 - h_0} - (1 + h_s) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1 \quad (1.10)$$

である。

ところで、

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 + h_s) (\dot{x}^i x^k - \dot{x}^k x^i) \right] = \frac{d}{d\tau} \left[(1 + h_s) \dot{x}^i \right] x^k - \frac{d}{d\tau} \left[(1 + h_s) \dot{x}^k \right] x^i \quad (1.11)$$

である。今、 h_0, h_s が $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ のみの関数とすると、(1.4) の右辺は x^i に比例する。よって、上式の右辺は 0 である：

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1 + h_s) (\dot{x}^i x^k - \dot{x}^k x^i) \right] = 0. \quad (1.12)$$

これは角運動量の保存則である。特に、

$$L_1 := (1 + h_s) (\dot{z}y - \dot{y}z), \quad (1.13)$$

$$L_2 := (1 + h_s) (\dot{x}z - \dot{z}x), \quad (1.14)$$

$$L_3 := (1 + h_s) (\dot{y}x - \dot{x}y) \equiv L \quad (1.15)$$

は保存する。

今、 $L_1 = L_2 = 0$ を仮定する。この時、極座標表示で、 $\varphi = \pi/2$ ($\dot{\varphi} = 0$) である¹⁾。また、

$$L = (1 + h_s)r^2\dot{\theta}, \quad (1.16)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 \quad (1.17)$$

である。(1.17) より、

$$\frac{K^2}{1 - h_0} - (1 + h_s)\dot{\theta}^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right] = 1 \quad (1.18)$$

である。また、(1.16) より、

$$\dot{\theta} = \frac{L}{(1 + h_s)r^2} \quad (1.19)$$

なので、

$$\frac{K^2}{1 - h_0} - \frac{L^2}{(1 + h_s)r^4} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right] = 1 \quad (1.20)$$

となる。今、

$$u := \frac{1}{r} \quad (1.21)$$

とすると、

$$\frac{du}{d\theta} = -u^2 \frac{dr}{d\theta}, \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \quad (1.23)$$

なので、

$$\frac{K^2}{1 - h_0} - \frac{L^2}{(1 + h_s)} \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \right] = 1, \quad (1.24)$$

$$u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{K^2}{1 - h_0} - 1\right) \frac{1 + h_s}{L^2} \quad (1.25)$$

を得る。

今、 M を中心 ($r = 0$) にある星の質量とし、

$$\phi := -2GMu, \quad (1.26)$$

$$h_0 = -\alpha\phi - a\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3), \quad (1.27)$$

$$h_s = -\beta\phi - b\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (1.28)$$

¹⁾ここでの θ, φ は多くの文献と逆である。つまり、ここでの φ は通常は θ と書かれるものである。

を仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}\frac{K^2}{1-h_0} - 1 &= K^2(1 - \alpha\phi - a\phi^2 + \alpha^2\phi^2 + \dots) - 1 \\ &= K^2 - 1 - K^2\alpha\phi + K^2(\alpha^2 - a)\phi^2 + \dots,\end{aligned}\quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{K^2}{1-h_0} - 1\right)\frac{1+h_s}{L^2} &= \frac{K^2-1}{L^2} - \frac{K^2\alpha}{L^2}\phi + \frac{K^2}{L^2}(\alpha^2 - a)\phi^2 \\ &\quad - \frac{K^2-1}{L^2}\beta\phi - \frac{K^2-1}{L^2}b\phi^2 + \frac{K^2\alpha\beta}{L^2}\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3) \\ &= A + Bu + Cu^2 + \dots\end{aligned}\quad (1.30)$$

となる。ただし、

$$A = \frac{K^2 - 1}{L^2}, \quad (1.31)$$

$$B = \frac{2GM}{L^2} [K^2\alpha + (K^2 - 1)\beta], \quad (1.32)$$

$$C = \frac{(2GM)^2}{L^2} [K^2(\alpha^2 + \alpha\beta - a) - (K^2 - 1)b] \quad (1.33)$$

である。よって、

$$u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = A + Bu + Cu^2 + \dots \quad (1.34)$$

となる。これを θ で微分して、 \dots を無視すると、

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2}B + Cu, \quad (1.35)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{2}B - (1 - C)u \quad (1.36)$$

を得る。

$$u = \frac{B}{2(1-C)} + v \quad (1.37)$$

とすると、

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} = -(1-C)v \quad (1.38)$$

となる。この解は、

$$v = v_0 \cos(\sqrt{1-C}\theta) + v_1 \sin(\sqrt{1-C}\theta) \quad (1.39)$$

であり、近日点は、角度が

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-C}} = 2\pi + C\pi + \mathcal{O}(C^2) \quad (1.40)$$

変化するたびび現れる。近日点の1周期ごとの歳差は、

$$\begin{aligned}\delta &= C\pi = \pi \frac{(2GM)^2}{L^2} [K^2(\alpha^2 + \alpha\beta - a) - (K^2 - 1)b] \\ &\approx \pi \frac{(2GM)^2}{L^2} (\alpha^2 + \alpha\beta - a)\end{aligned}\quad (1.41)$$

である。ここで、 $K^2 \approx 1$ とした。

1.2 PPN パラメーター

Parametrized post-Newtonian (PPN) 展開では、

$$h_0 = -\phi - \frac{\beta_{\text{PPN}}}{2}\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3), \quad (1.42)$$

$$h_s = -\gamma_{\text{PPN}}\phi + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (1.43)$$

である。つまり、

$$(\alpha, \beta, a) = (1, \gamma_{\text{PPN}}, \frac{\beta_{\text{PPN}}}{2}) \quad (1.44)$$

である。このとき、(1.41) は、

$$\begin{aligned} \delta &\approx \pi \frac{(2GM)^2}{L^2} (\alpha^2 + \alpha\beta - a) \\ &= \pi \frac{6(GM)^2}{L^2} \frac{2 - \beta_{\text{PPN}} + 2\gamma_{\text{PPN}}}{3} \equiv \delta_{\text{GR}} \frac{2 - \beta_{\text{PPN}} + 2\gamma_{\text{PPN}}}{3} \end{aligned} \quad (1.45)$$

となる。

アインシュタイン方程式の解は、

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{\phi}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{\phi}{4}\right)^{-2}, \quad (1.46)$$

$$g_{ik} = \delta_{ik} \left(1 - \frac{\phi}{4}\right)^4 \quad (1.47)$$

である [2]。よって、

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 - \left(1 + \frac{\phi}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{\phi}{4}\right)^{-2} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{\phi^2}{16}\right) \left(1 + \frac{\phi}{2} + \frac{3\phi^2}{16} + \frac{\phi^3}{16} + \dots\right) \\ &= -\phi - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{3}{16}\phi^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.48)$$

および、

$$\begin{aligned} h_s &= -1 + \left(1 - \frac{\phi}{4}\right)^4 \\ &= -\phi + \frac{3}{8}\phi^2 - \frac{1}{16}\phi^3 + \frac{1}{256}\phi^4 \end{aligned} \quad (1.49)$$

を得る。よって、 $\beta_{\text{PPN}} = \gamma_{\text{PPN}} = 1$ であり、

$$\delta \approx \delta_{\text{GR}} = \pi \frac{6(GM)^2}{L^2} \quad (1.50)$$

となる。

1.3 最低次の近似とその補正

アインシュタイン方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.51)$$

である。ここで、

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} := \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}[\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}], \quad (1.52)$$

$$R^\mu_{\lambda\alpha\beta} := \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\lambda\alpha}, \quad (1.53)$$

$$R_{\mu\nu} := R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (1.54)$$

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.55)$$

である。 $\kappa = 8\pi G$ はアインシュタイン定数で、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルである。

$R_{\mu\nu}$, R を $h_{\mu\nu}$ の 1 次でまで近似したものを $R_{\mu\nu}^{(1)}$, $R^{(1)}$ と書く。 $h_{\mu\nu}$ を、

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.56)$$

から求めると、

$$(\alpha_{(1)}, \beta_{(1)}, a_{(1)}, b_{(1)}) = (1, 1, 0, 0) \quad (1.57)$$

となることを、§ 1.4 で示す。添え字 $_{(1)}$ は、最低の近似であることを表す。なお、アインシュタイン方程式を $h_{\mu\nu}$ の 2 次までに近似した場合は、

$$(\alpha_{(2)}, \beta_{(2)}, a_{(2)}, b_{(2)}) = \left(1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right) \quad (1.58)$$

となる [1]。添え字 $_{(2)}$ は、2 次までの近似であることを表す。よって、

$$\delta_{(1)} = \pi \frac{(2GM)^2}{L^2} \cdot 2, \quad (1.59)$$

$$\delta_{(2)} = \pi \frac{(2GM)^2}{L^2} \cdot \frac{3}{2} = \delta_{\text{GR}}, \quad (1.60)$$

$$\delta_{(1)} = \frac{4}{3}\delta_{(2)} \quad (1.61)$$

である。 $\delta_{(2)}$ は実験と合うが、 $\delta_{(1)}$ は合わない。

1.4 最低次のアインシュタイン方程式の解

(1.56) を解こう。(1.56) は、

$$\chi_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.62)$$

$$\chi_{\mu\nu} := R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} \quad (1.63)$$

となる。

今、2階テンソル $X_{\mu\nu}$ に対して、

$$\bar{X}_{\mu\nu} := X_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X, \quad X := X^\sigma{}_\sigma, \quad X_{(\mu\nu)} := \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}) \quad (1.64)$$

とする。添え字は、 $\eta_{\mu\nu}$ の逆行列で上げた。このとき、

$$\bar{X} = (1 - D/2)X = -X \quad (1.65)$$

である。 $D = 4$ は次元である。よって、対称テンソルに対して、

$$\begin{aligned} \bar{\bar{X}}_{\mu\nu} &= X_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X \\ &= X_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.66)$$

となる。

さて、

$$\chi_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}^{(1)} \quad (1.67)$$

なので、

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \kappa\bar{T}_{\mu\nu} \quad (1.68)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2}[-\square h_{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\alpha h^\mu{}_\beta + \partial_\beta\partial_\mu h^\mu{}_\alpha - \partial_\beta\partial_\alpha h] \\ &= \frac{1}{2}[-\square h_{\alpha\beta} + 2\partial_\mu\partial_{(\alpha}\bar{h}^\mu{}_{\beta)}], \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$(1.70)$$

となる。ここでローレンス条件

$$\partial_\mu\bar{h}^\mu{}_\nu = 0 \quad (1.71)$$

を課すと、

$$\square h_{\mu\nu} = -2\kappa\bar{T}_{\mu\nu} \quad (1.72)$$

を得る。

さて、

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (1.73)$$

である。 ρ は質量密度で、 u^μ は速度ベクトル場である。今の近似では、 $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ である。このとき、

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \rho\left(u_\mu u_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\right) \approx \frac{1}{2}\rho \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1) \quad (1.74)$$

である。添え字は $\eta_{\mu\nu}$ で下げた。よって、

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\approx \frac{\kappa M}{4\pi r} \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1) \\ &= \frac{2GM}{r} \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1) \\ &= -\phi \cdot \text{diag}(1, 1, 1, 1) \end{aligned} \quad (1.75)$$

となる。これより、(1.57) を得る。

References

- [1] ファインマン, モリニーゴ, ワーグナー (著), 和田純夫 (訳) 『ファインマン講義重力の理論』 (岩波書店, 1999 年).
- [2] 内山龍雄 『相対性理論』 (岩波書店, 1977 年).