量子光学の公式

中嶋 慧

December 4, 2023

Abstract

本記事は「数学、物理、科学哲学、宇宙 Advent Calendar 2023」の 4 日目の記事である。この記事では量子光学でよく使われる公式の解説をする。

Contents

1 導入

最近、近藤『量子力学講義 I』[1] を購入し、以下の 2 つの公式を目にした。1 つ目は (9.243) 式

$$e^{\theta(b^\dagger a^\dagger - ab)} = e^{a^\dagger b^\dagger \tanh\theta} e^{-(a^\dagger a + b^\dagger b + 1)\ln\cosh\theta} e^{-ab\tanh\theta} \tag{1.1}$$

である。ここで a, b は (ボソンの) 消滅演算子である。2 つ目は (9.218) 式

$$e^{\frac{1}{2}[\xi(a^\dagger)^2 - \xi^* a^2]}|0\rangle = (1-|\kappa|^2)^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}\kappa^n|2n\rangle, \tag{1.2}$$

$$\xi = |\xi|e^{i\varphi}, \quad \kappa = e^{i\varphi}\tanh|\xi| \tag{1.3}$$

である ($n!$ は [1] では n になっていた)。ここで、a は消滅演算子で、$|n\rangle$ は個数状態

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad a|0\rangle = 0 \tag{1.4}$$

である。(1.1), (1.2) の導出は演習問題だが、解答に (1.1) の導出はなく、(1.2) の導出は不完全だと感じた。この記事ではこの 2 つの公式を次節の $su(1,1)$ の分解公式から統一的に導出する。

2 $su(1,1)$, $su(2)$ の公式

$su(1,1)$, $su(2)$ の生成子 $\{S_+, S_-, S_0\}$ は、交換関係

$$[S_-, S_+] = 2\sigma S_0, \tag{2.1}$$
$$[S_-, S_0] = S_-, \tag{2.2}$$
$$[S_+, S_0] = -S_+ \tag{2.3}$$

を満たす。$\sigma = 1$ が $su(1,1)$, $\sigma = -1$ が $su(2)$ に対応する。このとき、分解公式

$$e^{x(A_0S_0+A_-S_-+A_+S_+)} = e^{f_+(x)S_+}e^{f_0(x)S_0}e^{f_-(x)S_-}, \tag{2.4}$$
$$f_+(x) = \frac{A_+}{\phi}\frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_0}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \tag{2.5}$$
$$f_0(x) = -2\ln\Big[\cosh(\phi x) - \frac{A_0}{2\phi}\sinh(\phi x)\Big], \tag{2.6}$$
$$f_-(x) = \frac{A_-}{\phi}\frac{\sinh(\phi x)}{\cosh(\phi x) - \frac{A_0}{2\phi}\sinh(\phi x)}, \tag{2.7}$$
$$\phi = \sqrt{A_0^2/4 - \sigma A_-A_+} \tag{2.8}$$

が成り立つ [2, 3]。$su(2)$ の場合は文献 [4] にも記述がある。

(2.4) の導出の方針を述べる (詳しくは [2] を参照)。まず、

$$e^{x(A_0S_0+A_-S_-+A_+S_+)} = e^{f_+(x)S_+}F(x), \quad f_+(0) = 0, \quad F(0) = 1 \tag{2.9}$$

と置き、$F(x)$ が S_+ を含まないように $f_+(x)$ を決める。上式を x で微分し、$F(x)$ の一階常微分方程式

$$\begin{aligned} F'(x) = [A_+ - f_+'(x) + A_0f_+(x) + \sigma A_-f_+^2(x)]S_+F(x) \\ +[A_0S_0 + A_-S_- + 2\sigma A_-f_+(x)S_0]F(x) \end{aligned} \tag{2.10}$$

を得る。$F(x)$ が S_+ を含まないという条件から $f_+(x)$ の一階常微分方程式

$$A_+ - f_+'(x) + A_0f_+(x) + \sigma A_-f_+^2(x) = 0 \tag{2.11}$$

が決まる。次に、

$$F(x) = e^{f_0(x)S_0}G(x), \quad f_0(0) = 0, \quad G(0) = 1 \tag{2.12}$$

と置き、$G(x)$ が S_0 を含まないように $f_0(x)$ を決める。$G(x)$ の一階常微分方程式

$$G'(x) = [A_0 + 2\sigma A_-f_+(x) - f_0'(x)]S_0G(x) + A_-e^{f_0(z)}S_-G(x) \tag{2.13}$$

より、

$$A_0 + 2\sigma A_-f_+(x) - f_0'(x) = 0 \tag{2.14}$$

が得られる。

$su(1,1)$ の生成子 $\{S_+, S_-, S_0\}$ の具体例として、

$$S_+ = \frac{1}{2}(a^\dagger)^2, \tag{2.15}$$
$$S_- = \frac{1}{2}a^2, \tag{2.16}$$
$$S_0 = \frac{1}{2}(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \tag{2.17}$$

がある。a, $a^\dagger$ は (ボソンの) 生成・消滅演算子である。別の例は、

$$S_+ = b^\dagger a^\dagger, \tag{2.18}$$
$$S_- = ab, \tag{2.19}$$
$$S_0 = \frac{1}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b + 1) \tag{2.20}$$

である。a, b は (ボソンの) 消滅演算子である。

3 導出

(1.2) は、

$$\sigma = 1\,, \quad x = |\xi|\,, \quad A_+ = e^{i\varphi}\,, \quad A_- = -e^{-i\varphi}\,, \quad A_0 = 0 \tag{3.1}$$

の場合であり、(1.1) はさらに $x = \theta$, $\varphi = 0$ とした場合である。このとき、

$$f_+(x) = e^{i\varphi}\tanh x, \tag{3.2}$$
$$f_0(x) = -2\ln\cosh x, \tag{3.3}$$
$$f_-(x) = -e^{-i\varphi}\tanh x \tag{3.4}$$

である。よって、

$$e^{x(e^{i\varphi}S_+ - e^{-i\varphi}S_-)} = e^{e^{i\varphi}S_+\tanh x}e^{-2S_0\ln\cosh x}e^{-e^{-i\varphi}S_-\tanh x} \tag{3.5}$$

である。(2.18) から (2.20) と $x = \theta$, $\varphi = 0$ を代入して (1.1) を得る。(2.15) から (2.17) を代入して、

$$e^{\frac{1}{2}[\xi(a^\dagger)^2 - \xi^* a^2]} = e^{\frac{1}{2}e^{i\varphi}(a^\dagger)^2\tanh x}e^{-(a^\dagger a + \frac{1}{2})\ln\cosh x}e^{-\frac{1}{2}e^{-i\varphi}a^2\tanh x} \tag{3.6}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}[\xi(a^\dagger)^2 - \xi^* a^2]}|0\rangle &= e^{\frac{1}{2}e^{i\varphi}(a^\dagger)^2\tanh x}e^{-(a^\dagger a + \frac{1}{2})\ln\cosh x}|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh x}}e^{\frac{1}{2}\kappa(a^\dagger)^2}|0\rangle \end{aligned} \tag{3.7}$$

である。ここで、

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\kappa(a^\dagger)^2}|0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\kappa^n(a^\dagger)^{2n}|0\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\kappa^n\sqrt{(2n)!}|2n\rangle
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

である。また、

$$
1-|\kappa|^2 = 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{3.9}
$$

なので、

$$
(1-|\kappa|^2)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{\cosh x}} \tag{3.10}
$$

である。よって、(1.2) が得られた。

References

[1] 近藤慶一『量子力学講義 I』共立出版, 2023 年.

[2] 中嶋慧「ハウスドルフ公式と $su(1,1)$, $su(2)$ の公式」
http://physnakajima.html.xdomain.jp/formulas.pdf

[3] Masashi Ban, "Decomposition formulas for su(1, 1) and su(2) Lie algebras and their applications in quantum optics", Journal of the Optical Society of America B **10**, 1347 (1993).

[4] 梅田亨「不変式論と非可換特殊多項式」
https://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium/05/umeda.pdf