時空代数

中嶋 慧

June 22, 2018

1 導入

γ^μ を

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\eta^{\mu\nu},\ \eta^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{1.1}$$

を満たすクリフォード代数の単位とする。σ^i を

$$\sigma^i\overset{\mathrm{def}}{=}\gamma^0\gamma^i \tag{1.2}$$

で定義すると、

$$\gamma^\mu v_\mu=(v^0+\sigma^i v_i)\gamma^0 \tag{1.3}$$

である。今、

$$\boldsymbol{a}\overset{\mathrm{def}}{=}\sigma^i a_i\,,\quad \boldsymbol{b}\overset{\mathrm{def}}{=}\sigma^i b_i \tag{1.4}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab}&=a_ib_j\sigma^i\sigma^j\\&=a_ib_j\gamma^0\gamma^i\gamma^0\gamma^j\\&=a_ib_i+a_ib_j\gamma^{[i}\gamma^{j]}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

今、

$$I\overset{\mathrm{def}}{=}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{1.6}$$

とすると、

$$I^2=-1, \tag{1.7}$$

$$I\gamma_\mu\gamma_\nu=\gamma_\mu\gamma_\nu I. \tag{1.8}$$

また、

$$I\sigma^1=\gamma^2\gamma^3\,,\quad I\sigma^2=-\gamma^1\gamma^3\,,\quad I\sigma^3=\gamma^1\gamma^2, \tag{1.9}$$

$$I\gamma^1\gamma^2=-\gamma^0\gamma^3\,,\quad I\gamma^1\gamma^3=\gamma^0\gamma^2\,,\quad I\gamma^2\gamma^3=-\gamma^0\gamma^1 \tag{1.10}$$

である。これは、

$$I\sigma^i = \frac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\gamma^j\gamma^k, \tag{1.11}$$

$$I\gamma^{[i}\gamma^{j]} = -\varepsilon^{ij}{}_k\sigma^k \tag{1.12}$$

と書ける。ところで、

$$\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba} = 2a_ib_j\gamma^{[i}\gamma^{j]}, \tag{1.13}$$

$$-\frac{I}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}) = a_ib_j\varepsilon^{ij}{}_k\sigma^k \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1.14}$$

よって、

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}) = I\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1.15}$$

また、

$$I\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}a_i\varepsilon^i{}_{jk}\gamma^j\gamma^k \equiv \frac{1}{2}a_{jk}\gamma^{[j}\gamma^{k]}, \tag{1.16}$$

$$a_{jk} \overset{\text{def}}{=} a_i\varepsilon^i{}_{jk}. \tag{1.17}$$

なお、

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}) = a_ib_i \equiv \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \tag{1.18}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ab} &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + I\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

　ここで、

$$D \overset{\text{def}}{=} \gamma^\mu\partial_\mu \tag{1.20}$$

を導入すると、

$$D\gamma^0 = -\partial_0 - \sigma^i\partial_i \equiv -\partial_0 - \boldsymbol{\nabla} \tag{1.21}$$

2　電磁場

2.1　ベクトルポテンシャル

$$A \overset{\text{def}}{=} \gamma^\mu A_\mu \tag{2.1}$$

は、ローレンス条件

$$-\partial_0 A_0 + \partial_i A_i = 0 \tag{2.2}$$

を満たすとする。この時、

$$\begin{aligned} F &\overset{\text{def}}{=} DA \\ &= -D\gamma^0\gamma^0 A \\ &= (\partial_0 + \boldsymbol{\nabla})(-A_0 + \boldsymbol{A}) \\ &= -\partial_0 A_0 + \partial_0 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A_0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A} \\ &= \partial_0 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} A_0 + \boldsymbol{\nabla}\wedge\boldsymbol{A} \\ &= -\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで、

$$\boldsymbol{E} = -\partial_0 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} A_0, \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

はそれぞれ 2 形式である。

2.2 モノポールありのマクスウェル方程式

磁荷もある場合を考え、

$$F \overset{\text{def}}{=} -\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}^{(2)} \tag{2.6}$$

とする。$\boldsymbol{B}^{(2)}$ は磁場の 2 形式

$$\boldsymbol{B}^{(2)} = \frac{1}{2} B_{ij}\gamma^{[i}\gamma^{j]} \tag{2.7}$$

で、4 次元時空では、$I\boldsymbol{B}$ と書ける。また、

$$\boldsymbol{E} \overset{\text{def}}{=} \gamma^0\gamma^i E_i \tag{2.8}$$

である。この時、

$$\begin{aligned} DF &= (\gamma^0\partial_0 + \gamma^i\partial_i)(-\gamma^0\gamma^j E_j + \frac{1}{2}B_{jk}\gamma^{[j}\gamma^{k]}) \\ &= \gamma^i\partial_0 E_i + \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^{[j}\gamma^{k]}\partial_0 B_{jk} + \gamma^0\gamma^i\gamma^j\partial_i E_j + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^{[j}\gamma^{k]}\partial_i B_{jk} \\ &= \gamma^i\partial_0 E_i + \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^{[i}\gamma^{j]}\partial_0 B_{ij} + \gamma^0\partial_i E_i + \gamma^0\gamma^{[i}\gamma^{j]}\partial_i E_j + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^{[j}\gamma^{k]}\partial_i B_{jk} \end{aligned} \tag{2.9}$$

である。ここで、公式

$$\gamma^i\gamma^{[j}\gamma^{k]} = \gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]} + 2\delta^{i[j}\gamma^{k]} \tag{2.10}$$

を使うと、

$$DF = \gamma^0 \partial_i E_i + \frac{1}{2}\gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]}\partial_{[i}B_{jk]} + \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^{[i}\gamma^{j]}(2\partial_{[i}E_{j]} + \partial_0 B_{ij}) + \gamma^i(\partial_0 E_i + \partial_j B_{ji}) \tag{2.11}$$

となる。モノポールありのマクスウェル方程式

$$\partial_i E_i = \rho, \tag{2.12}$$

$$-\partial_0 E_i - \partial_j B_{ji} = J_i, \tag{2.13}$$

$$3\partial_{[i}B_{jk]} = K_{ijk}, \tag{2.14}$$

$$2\partial_{[i}E_{j]} + \partial_0 B_{ij} = K_{0ij} \tag{2.15}$$

より、

$$\begin{aligned} DF &= \gamma^0\rho + \frac{1}{2}\gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]}\partial_i B_{jk} + \gamma^0\gamma^{[j}\gamma^{k]}(\partial_{[i}E_{j]} + \frac{1}{2}\partial_0 B_{jk}) - \gamma^i J_i \\ &= \gamma^0\rho + \frac{1}{3!}\gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]}K_{ijk} + \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^{[i}\gamma^{j]}K_{0ij} - \gamma^i J_i \equiv -J + K, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$J = -\gamma^0\rho + \gamma^i J_i, \tag{2.17}$$

$$K = \frac{1}{3!}\gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]}K_{ijk} + \frac{1}{2}\gamma^0\gamma^{[i}\gamma^{j]}K_{0ij} \tag{2.18}$$

である。これに、4 次元時空で成り立つ $B_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^k B_k$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]}\partial_i B_{jk} &= \gamma^1\gamma^2\gamma^3\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^l{}_{jk}\partial_i B_l \\ &= \gamma^1\gamma^2\gamma^3\partial_i B_i \\ &= \gamma^1\gamma^2\gamma^3\rho_{(m)} \\ &= -\gamma^0 I\rho_{(m)} \end{aligned} \tag{2.19}$$

および、

$$\begin{aligned} \gamma^{[i}\gamma^{j]}(\partial_{[i}E_{j]} + \frac{1}{2}\partial_0 B_{jk}) &= \gamma^{[i}\gamma^{j]}(\partial_{[i}E_{j]} + \frac{1}{2}\partial_0\varepsilon_{jk}{}^l B_l) \\ &= I\sigma^k\partial_0 B_k + I\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \\ &= I(\partial_0\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) \\ &= -I\boldsymbol{J}_{(m)} \end{aligned} \tag{2.20}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} DF &= \gamma^0\rho - \rho_{(m)}\gamma^0 I - \gamma^0 I\boldsymbol{J}_{(m)} - \gamma^i J_i \\ &= \rho\gamma^0 - \rho_{(m)}\gamma^0 I + \boldsymbol{J}_{(m)}\gamma^0 I - \boldsymbol{J}\gamma^0 \\ &= -J + J_{(m)}I, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$J = (-\rho + \boldsymbol{J})\gamma^0, \tag{2.22}$$

$$J_{(m)} = (-\rho_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)})\gamma^0 \tag{2.23}$$

を得る。

2.3　双対方程式

双対方程式は、

$$
\begin{aligned}
F\overleftarrow{D} &= (-\gamma^0\gamma^j E_j + \frac{1}{2}B_{jk}\gamma^{[j}\gamma^{k]})(\gamma^0\overleftarrow{\partial_0} + \gamma^i\overleftarrow{\partial_i}) \\
&= -\gamma^i\partial_0 E_i + \frac{1}{2}\partial_0 B_{jk}\gamma^0\gamma^{[j}\gamma^{k]} - \gamma^0\gamma^j\gamma^i\partial_i E_j + \frac{1}{2}\partial_i B_{jk}\gamma^{[j}\gamma^{k]}\gamma^i \\
&= -\gamma^i\partial_0 E_i + \frac{1}{2}\partial_0 B_{jk}\gamma^0\gamma^{[j}\gamma^{k]} - \gamma^0\partial_i E_i + \gamma^0\gamma^{[i}\gamma^{j]}\partial_{[i}E_{j]} + \frac{1}{2}\partial_i B_{jk}\gamma^{[j}\gamma^{k]}\gamma^i
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

である。ここで、

$$
\gamma^{[j}\gamma^{k]}\gamma^i = \gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]} - 2\delta^{i[j}\gamma^{k]} \tag{2.25}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
F\overleftarrow{D} &= -\gamma^0\partial_i E_i + \frac{1}{2}\partial_i B_{jk}\gamma^{[i}\gamma^j\gamma^{k]} + \gamma^0\gamma^{[i}\gamma^{j]}(\partial_{[i}E_{j]} + \frac{1}{2}\partial_0 B_{ij}) - \gamma^i(\partial_0 E_i + \partial_j B_j i) \\
&= J + K = J + J_{(m)}I
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

となる。

2.4　ローレンツ力

$$
FDF + F\overleftarrow{D}F = \partial_\mu(F\gamma^\mu F) \tag{2.27}
$$

である。

$$
S^\mu \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}F\gamma^\mu F \tag{2.28}
$$

とすると、

$$
\partial_\mu S^\mu = -\frac{1}{2}(FDF + F\overleftarrow{D}F) \equiv -f \tag{2.29}
$$

であり、

$$
f = f_e + f_m, \tag{2.30}
$$

$$
f_e = -\frac{1}{2}(FJ - JF), \tag{2.31}
$$

$$
f_m = \frac{1}{2}(FJ_{(m)}I + J_{(m)}IF) \tag{2.32}
$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
f_e\gamma^0 &= -\frac{1}{2}(FJ - JF)\gamma^0 \\
&= -\frac{1}{2}(FJ\gamma^0 - J\gamma^0 F^*) \\
&= \frac{1}{2}[(-\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})(-\rho + \boldsymbol{J}) - (-\rho + \boldsymbol{J})(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})]
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

ここで、$F^* = \boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B}$ は $F\gamma^0 = \gamma^0 F^*$ で定義した。これは、

$$\begin{aligned} f_e\gamma^0 &= \rho\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}I(\boldsymbol{BJ} - \boldsymbol{JB}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{EJ} + \boldsymbol{JE}) \\ &= \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。これは、ローレンツ力と相互作用エネルギーの (-1) 倍を表す。

磁気的対応物は、

$$\begin{aligned} f_m\gamma^0 &= \frac{1}{2}(FJ_{(m)}I + J_{(m)}IF)\gamma_0 \\ &= \frac{1}{2}(FJ_{(m)}I\gamma^0 + J_{(m)}I\gamma^0 F^*) \\ &= -\frac{1}{2}(FJ_{(m)}\gamma^0 I + J_{(m)}\gamma^0 IF^*) \\ &= \frac{1}{2}[(-\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})(-\rho_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)})I + (-\rho_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)})I(\boldsymbol{E} + I\boldsymbol{B})] \\ &= \rho_{(m)}\boldsymbol{B} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{J}_{(m)} - \boldsymbol{J}_{(m)}\boldsymbol{E})I - \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}_{(m)} + \boldsymbol{J}_{(m)}\boldsymbol{B}) \\ &= \rho_{(m)}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}_{(m)} \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_{(m)} \cdot \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{2.35}$$

である。これは、「ローレンツ力」と相互作用エネルギーの (-1) 倍を表す。

References

[1] J. Dressel, K. Y. Bliokh, Franco Nori, “Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism”, Phys. Rep. 589 (2015) 1.