

# 量子開放系におけるスピード限界： エントロピー生成とトレース距離

S. Nakajima and Y. Utsumi, *New. J. Phys.* **24**, 095004 (2022).

三重大学大学院工学研究科 中嶋 慧  
(共同研究者:内海 裕洋)

2022年10月11日 量子基礎論・量子情報オンラインセミナー

# 自己紹介

## 履歴

- 2010年3月 群馬工業高等専門学校 物質工学科 卒業 (準学士(工学))  
2012年3月 筑波大学 理工学群物理学類 卒業 (学士(理学))  
2014年3月 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 物理学専攻 修士課程 修了  
(修士(理学))  
2017年3月 筑波大学大学院 数理物質科学研究科 ナノサイエンス・ナノテクノロジー専攻  
(博士(理学), 指導教員: 都倉 康弘)  
2017年4月から10月 ITエンジニア  
2020年10月中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社)  
2021年4月三重大学大学院工学研究科 研究員(ポスドク)

## 専門

### 非平衡統計力学(M2から)

量子ポンプ(修士)  
過剰エントロピー生成(博士)  
スピード限界(ポスドク) ← 今日の話

### 共変解析力学(D2から)

重力場への応用  
De Donder-Weyl理論との関係  
変換の生成子

一般ゲージ理論と  
共変解析力学

中嶋 慧・松尾 衛 共著

現代数学社

# 今日の流れ

## (1) 先行研究

- イントロ
- 量子孤立系(Mandelstam-Tammの関係式)
- 古典開放系(白石・布能・齊藤, 2018)
- 量子開放系  
    布能・白石・齊藤, 2019  
    Vu・長谷川, 2021

## (2) 我々の研究

- 結果の紹介と具体例での比較
- 導出

# スピード限界とは

状態(または物理量)の変化の速さの上限や下限。

特に、状態間の何らかの距離 $L$ についての上限(や下限)を与える式。

本発表で注目するのは、 $L$ の上限をエントロピー生成 $\sigma$ を用いて与えるもの。  
逆に言うと、 $\sigma$ の下限を距離 $L$ を用いて与えるもの。

または変化にかかる時間の下限についての式。  
特にそれを $L$ ,  $\sigma$ およびアクティビティ $A$ を用いて与えたもの。

# スピード限界の研究の歴史

## 孤立量子系

L. Mandelstam and I. Tamm, *J. Phys. (Moscow)* **9**, 249 (1945).

N. Margolus and L. B. Levitin, *Physica D* **120**, 188 (1998).

今も盛んに研究されている。

## 量子開放系(2013年頃から)

M. M. Taddei, *et al.*, *PRL* **110**, 050402 (2013).

A. del Campo, *et al.*, *PRL* **110**, 050403 (2013).

S. Deffner and E. Lutz, *PRL* **111**, 010402 (2013).

## レビュー論文

S. Deffner and S. Campbell, *J. Phys. A: Math. Theor.* **50**, 453001 (2017).

---

## 古典開放系(2018年)

N. Shiraishi, K. Funo and K. Saito, *PRL* **121**, 070601 (2018).

## 量子開放系(関連する先行研究)

K. Funo, N. Shiraishi and K. Saito, *New. J. Phys.* **21**, 013006 (2019).

T. V. Vu and Y. Hasegawa, *PRL* **126**, 010601 (2021).

T. V. Vu and K. Saito, *PRL* **128**, 010602 (2022).

S. Nakajima and Y. Utsumi, *New. J. Phys.* **24**, 095004 (2022).

# 時間依存する開放系

近年、時間依存する開放系が盛んに研究されている。

## (1) 量子ポンプや過剰エントロピー生成の研究

S. Nakajima and Y. Tokura, *J. Stat. Phys.* **169**, 902 (2017).

## (2) 熱機関の効率とパワーの研究

N. Shiraishi, K. Saito and H. Tasaki, *PRL* **117**, 190601 (2016).

H. Tajima and K. Funo, *PRL* **127**, 190604 (2021).

## (3) 断熱ショートカット

D. Guéry-Odelin, *et. al.*, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 045001 (2019).

## (4) 熱力学的不確定性関係

T. V. Vu and K. Saito, *PRL* **128**, 140602 (2022).

V. T. Vo, T. V. Vu, and Y. Hasegawa, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**, 405004 (2022).

## (5) スピード限界の研究

N. Shiraishi, K. Funo and K. Saito, *PRL* **121**, 070601 (2018).

K. Funo, N. Shiraishi and K. Saito, *New. J. Phys.* **21**, 013006 (2019).

T. V. Vu and Y. Hasegawa, *PRL* **126**, 010601 (2021).

T. V. Vu and K. Saito, *PRL* **128**, 010602 (2022).

# 最適輸送理論との関係

最近、熱力学的不確定性関係やスピード限界を最適輸送理論の観点から統一的に理解しようという試みがある。

K. Yoshimura, A. Kolchinsky, A. Dechant, and S. Ito, arXiv:2205.15227

T. V. Vu and K. Saito, arXiv:2206.02684

おそらく本発表の結果を最適輸送理論の観点で理解するのは難しい：  
最適輸送理論ではWasserstein distanceが重要だが、その量子版はトレース距離を表せない。

N. Yu, L. Zhou, S. Ying, and M. Ying, arXiv:1803.02673

# Mandelstam-Tammの式(混合状態)

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H(t), \rho] \quad \hbar = 1$$

$$\mathcal{L}(\rho(\tau), \rho(0)) \leq \int_0^\tau dt \Delta E$$

$$\mathcal{L}(\rho, \sigma) := \cos^{-1} F(\rho, \sigma), \quad \text{Bures angle (距離)}$$

$$F(\rho, \sigma) := \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} = F(\sigma, \rho), \quad \text{Fidelity}$$

$$\Delta E := \sqrt{\text{tr}(\rho H^2) - [\text{tr}(\rho H)]^2}.$$

L. Mandelstam and I. Tamm,

“The Uncertainty Relation Between Energy and Time in Non-relativistic Quantum Mechanics”

J. Phys. (Moscow) **9**, 249 (1945).



# 証明(1)

まず純化する。

対角化  $\rho(0) = \sum p_i |\phi_i\rangle_S \langle \phi_i|,$

アンシラ系Aの規格直交系

$$|\rho(t)\rangle\rangle := U(t) \sum_i \sqrt{p_i} |\phi_i\rangle_S \otimes |i\rangle_A$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = -iH(t)U(t), \quad U(0) = 1.$$

$$\text{tr}_A(|\rho(t)\rangle\rangle \langle\langle \rho(t)|) = \rho(t) \quad \text{純化}$$

Robertson inequality

$$\Delta X \Delta E \geq \frac{1}{2} |\langle i[H, X] \rangle_t|$$

with  $X = |\rho(0)\rangle\rangle \langle\langle \rho(0)|.$

$$\Delta Y := \sqrt{\langle Y^2 \rangle_t - \langle Y \rangle_t^2} \quad \text{and} \quad \langle Y \rangle_t := \langle\langle \rho(t) | Y | \rho(t) \rangle\rangle$$

# 証明(2)

Robertson inequalityとシュレーディンガー方程式  $\frac{d|\rho(t)\rangle\rangle}{dt} = -iH|\rho(t)\rangle\rangle$  から

$$\Delta E \geq \left| \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{\langle X \rangle_t}}{\sqrt{1 - \langle X \rangle_t}} \right|$$

$$L := \left| \int_0^\tau dt \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{\langle X \rangle_t}}{\sqrt{1 - \langle X \rangle_t}} \right| \leq \int_0^\tau dt \left| \frac{\frac{d}{dt} \sqrt{\langle X \rangle_t}}{\sqrt{1 - \langle X \rangle_t}} \right| \leq \int_0^\tau dt \Delta E$$

$$L = |\cos^{-1} \sqrt{\langle X \rangle_\tau} - \cos^{-1} \sqrt{\langle X \rangle_0}| = \cos^{-1} |\langle\langle \rho(\tau) | \rho(0) \rangle\rangle|.$$

これと、

$$|\langle\langle \rho(t) | \rho(0) \rangle\rangle| \leq F(\rho(t), \rho(0))$$

Nielsen & Chuang など

より、Mandelstam-Tammの式が示される。

# トレース距離の上限

$$\|X\|_1 := \text{tr} \sqrt{X^\dagger X}$$

$$\frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1 \leq \sin \mathcal{L}(\rho, \sigma) \leq \mathcal{L}(\rho, \sigma) \quad \text{Nielsen \& Chuang など}$$

Mandelstam-Tammの式より、

$$\frac{1}{2} \|\rho(\tau) - \rho(0)\|_1 \leq \int_0^\tau dt \Delta E$$

弱いMandelstam-Tammの式

# 弱い Mandelstam-Tamm の式の別証

$$\begin{aligned}\|\rho(\tau) - \rho(0)\|_1 &= \left\| \int_0^\tau dt \frac{d\rho}{dt} \right\|_1 \\ &\leq \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho}{dt} \right\|_1 = \int_0^\tau dt \| -i[H, \rho] \|_1\end{aligned}$$

$$[H, \rho] = \text{Tr}_A([\bar{H}, \underline{|\rho\rangle}\langle\langle\rho|)]) \quad \bar{H} \stackrel{\text{def}}{=} H \otimes 1_A$$

← 純化のうちの1つ

任意の CPTP map  $\Phi$  に対して、

$$\|\Phi(X)\|_1 \leq \|X\|_1 \quad (X = X^\dagger, \text{tr} X = 0) \quad \text{Nielsen \& Chuang など}$$

であり、 $\text{Tr}_A$  は CPTP map である。また、

$$\| -i[\bar{H}, \underline{|\rho\rangle}\langle\langle\rho|] \|_1 = 2\Delta E$$

なので、

$$\| -i[H, \rho] \|_1 \leq 2\Delta E$$

を得る。これより示される。

# 古典マスター方程式

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \sum_m W_{nm}p_m(t)$$

$$W_{nm} = \sum_b \underline{W_{nm}^{(b)}}$$

熱浴**b**からの寄与

$$\sum_n W_{nm}^{(b)} = 0 \quad \text{確率の保存}$$

局所詳細つり合い

$$W_{nm}^{(b)} e^{-\beta_b E_m} = W_{mn}^{(b)} e^{-\beta_b E_n} \quad (m \neq n)$$

熱浴**b**の逆温度

状態**n**のエネルギー

# エントロピー生成率

$$\frac{d}{dt}\langle E \rangle = \frac{d}{dt} \sum_n E_n p_n = \underbrace{\sum_n \frac{dE_n}{dt} p_n}_{\text{仕事率}} + \underbrace{\sum_n E_n \frac{dp_n}{dt}}_{\text{熱流}}$$

$$\begin{aligned} \sum_n E_n \frac{dp_n}{dt} &= \sum_n E_n \sum_b \sum_{m(\neq n)} (W_{nm}^{(b)} p_m - W_{mn}^{(b)} p_n) \\ &= \underbrace{\sum_b \sum_{m \neq n} W_{nm}^{(b)} p_m (E_n - E_m)}_{\text{熱浴 } b \text{ から系への熱流}} \end{aligned}$$

エントロピー生成率

$$\dot{\sigma} := \frac{d}{dt} S_{\text{Shannon}} - \sum_b \beta_b \sum_{m \neq n} W_{nm}^{(b)} p_m (E_n - E_m)$$

$$S_{\text{Shannon}} = - \sum_n p_n \ln p_n \quad \text{シャノン・エントロピー}$$

# エントロピー生成率の変形

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= - \sum_b \sum_{m \neq n} \left[ \ln p_n (W_{nm}^{(b)} p_m - W_{mn}^{(b)} p_n) + \beta_b W_{nm}^{(b)} p_m (E_n - E_m) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_b \sum_{m \neq n} \left[ (W_{nm}^{(b)} p_m - W_{mn}^{(b)} p_n) \ln \frac{p_m}{p_n} + (W_{nm}^{(b)} p_m - W_{mn}^{(b)} p_n) \beta_b (E_m - E_n) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_b \sum_{m \neq n} \left[ (W_{nm}^{(b)} p_m - W_{mn}^{(b)} p_n) \left\{ \ln \frac{p_m}{p_n} + \beta_b (E_m - E_n) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_b \sum_{m \neq n} \left[ (W_{nm}^{(b)} p_m - W_{mn}^{(b)} p_n) \ln \frac{W_{nm}^{(b)} p_m}{W_{mn}^{(b)} p_n} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_b \sum_{m \neq n} \pi(a_{mn}^{(b)}, b_{mn}^{(b)}) \geq 0 \quad \text{熱力学第2法則}\end{aligned}$$

 局所詳細つり合い

$$\pi(a, b) := (a - b) \ln \frac{a}{b} \geq 0$$

$$a_{ij}^{(b)} := W_{ij}^{(b)} p_j, \quad b_{ij}^{(b)} := W_{ji}^{(b)} p_i$$

# 白石・布能・齊藤(1)

$$l := \sum_i |p_i(\tau) - p_i(0)| \quad L^1 \text{ 距離}$$

$$= \sum_i \left| \int_0^\tau dt \frac{d}{dt} p_i \right|$$

\* 以下、三角不等式とコーシー・シュワルツの不等式を多用する。

$$\leq \int_0^\tau dt \sum_i \left| \frac{d}{dt} p_i \right| = \int_0^\tau dt \sum_i \left| \sum_{j(\neq i)} (W_{ij} p_j - W_{ji} p_i) \right|$$

$$\leq \int_0^\tau dt \sum_i \sum_{j(\neq i)} |W_{ij} p_j - W_{ji} p_i| \leq \int_0^\tau dt \sum_i \sum_{j(\neq i), b} |W_{ij}^{(b)} p_j - W_{ji}^{(b)} p_i|$$

$$= \int_0^\tau dt \sum_i \sum_{j(\neq i), b} \sqrt{(a_{ij}^{(b)} - b_{ij}^{(b)})^2}$$

コーシー・シュワルツの不等式

$$\leq \int_0^\tau dt \sum_i \sqrt{\sum_{j(\neq i), b} \frac{(a_{ij}^{(b)} - b_{ij}^{(b)})^2}{f(a_{ij}^{(b)}, b_{ij}^{(b)})} \sum_{j(\neq i), b} f(a_{ij}^{(b)}, b_{ij}^{(b)})} =: l_f^*$$

$$\frac{(a - b)^2}{f(a, b)} \leq \pi(a, b)$$



# 白石・布能・齊藤(2)

$$\begin{aligned} l_f^* &\leq \int_0^\tau dt \sqrt{\sum_{i \neq j, b} \pi(a_{ij}^{(b)}, b_{ij}^{(b)}) \sum_{i \neq j, b} f(a_{ij}^{(b)}, b_{ij}^{(b)})} \\ &= \int_0^\tau dt \sqrt{2\dot{\sigma}(t)A_f(t)}, \quad A_f(t) := \sum_{i \neq j, b} f(a_{ij}^{(b)}, b_{ij}^{(b)}) \end{aligned}$$

$$l \leq l_f^* \leq \int_0^\tau dt \sqrt{\dot{\sigma}(t)2A_f(t)} \leq \sqrt{2\sigma \int_0^\tau dt 2A_f(t)} \quad \sigma := \int_0^\tau dt \dot{\sigma}$$

エントロピー生成

$$\pi(a, b) = (a - b) \ln \frac{a}{b} \geq \frac{2(a - b)^2}{a + b} \quad \text{より、} \quad f(a, b) = \frac{a + b}{2} \quad \text{が許される。}$$

この場合、 $A_f$  はアクティビティ  $A_c(t) = \sum_{n \neq m} W_{mn} p_n$

# 白石・布能・齊藤の改良

許される最小の  $f(a, b)$  は、

$$\text{対数平均} \quad \Psi(a, b) := \frac{b - a}{\ln \frac{b}{a}} \leq \frac{a + b}{2}$$

$$M_c(t) := A_\Psi(t) \leq A_c(t) = \sum_{n \neq m} W_{mn} p_n$$

$$\sigma \geq \frac{l^2}{\int_0^\tau dt \, 2M_c(t)} \geq \frac{l^2}{\int_0^\tau dt \, 2A_c(t)} \quad l := \sum_i |p_i(\tau) - p_i(0)|$$

↑  
白石・布能・齊藤

N. Shiraishi, K. Funo and K. Saito, PRL **121**, 070601 (2018).

等号成立の例: S. Nakajima and Y. Utsumi, PRE **104**, 054139 (2021).

# 量子マスター方程式

GKSL方程式  $\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] + \mathcal{D}(\rho)$

$$\mathcal{D}(\rho) := \sum_k \gamma_k \left( \underline{L_k \rho L_k^\dagger} - \frac{1}{2} L_k^\dagger L_k \rho - \frac{1}{2} \rho L_k^\dagger L_k \right)$$

← jump operator

$$= \sum_b \mathcal{D}_b(\rho)$$

$$H(t) := H_S(t) + \underline{H_L(t)} \quad \text{Lamb shift Hamiltonian} \quad [H_L(t), H_S(t)] = 0$$

$$[L_{b,a,\omega}, H_S] = \underline{\omega} L_{b,a,\omega}, \quad L_{b,a,-\omega} = L_{b,a,\omega}^\dagger$$

熱浴のラベル      エネルギー差

$$\gamma_{b,a,-\omega} = e^{-\beta_b \omega} \gamma_{b,a,\omega} \quad \text{局所詳細つりあい}$$

$\gamma_k (\geq 0)$ ,  $L_k$ ,  $\omega$ ,  $\beta_b$  は時間に依存してよい。

# 注意

Born-Markov近似 + 回転波近似(RWA)ならGKSL方程式 + 局所詳細つり合い  
逆は成り立たない(多分)

Born-Markov近似 + coarse-grained approximation (CGA)でGKSL方程式。  
CGAで粗視化時間が大きい極限でRWAになる。

D. A. Lidar, arXiv:1902.00967

GKSL方程式なら完全正值性が保たれる(Kraus表現で表せるので)。

量子マスター方程式(Born-Markov + RWA)は特異摂動論で理解できる:

久木田真吾

博士論文「特異摂動理論から見た量子開放系の摂動的手法」

名古屋大学2018年3月

S. Kukita, Phys. Rev. E **96**, 042113 (2017).

# エントロピー生成率

$$\dot{\sigma} := -\text{tr} \left[ \frac{d\rho}{dt} \ln \rho \right] - \sum_b \beta_b \text{tr} [\mathcal{D}_b(\rho) H_S]$$

熱浴**b**から系への熱流

対角化  $\rho(t) = \sum_n p_n(t) |n(t)\rangle \langle n(t)|$

←  $n = m$  かつ  $\omega = 0$  の項を除外

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} \sum'_{m,n,k} \pi(a_{nm}^{(k)}, a_{nm}^{(-k)}) \quad -k = (b, a, -\omega)$$

$$a_{nm}^{(k)} := \gamma_k |\langle n(t) | L_k | m(t) \rangle|^2 p_m$$

$$A := \sum_{n \neq m} \sum_k a_{nm}^{(k)} \quad \text{アクティビティ}$$

# 布能・白石・齊藤(1)

$$\begin{aligned}
 \|\rho(\tau) - \rho(0)\|_1 &\leq \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho}{dt} \right\|_1 \\
 &\leq \underbrace{\int_0^\tau dt \| -i[H, \rho] \|_1}_{=: c_1} + \underbrace{\int_0^\tau dt \| \mathcal{D}_{\text{nd}}(\rho) \|_1}_{=: c_2} + \underbrace{\int_0^\tau dt \| \mathcal{D}_{\text{d}}(\rho) \|_1}_{=: c_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\text{d}}(\rho) &:= \sum_n |n\rangle\langle n| \mathcal{D}(\rho) |n\rangle\langle n| \\
 \mathcal{D}_{\text{nd}}(\rho) &:= \sum_{n \neq m} |n\rangle\langle n| \mathcal{D}(\rho) |m\rangle\langle m|
 \end{aligned}
 \quad c_3 = \int_0^\tau dt \sum_n \left| \frac{dp_n}{dt} \right|$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \sum_k \sum_{m(\neq n)} (a_{nm}^{(k)} - a_{mn}^{(-k)})$$

「マスター方程式」

$$a_{nm}^{(k)} = \gamma_k |\langle n(t) | L_k | m(t) \rangle|^2 p_m$$

# 布能・白石・齊藤(2)

$$\|\rho(\tau) - \rho(0)\|_1 \leq c_1 + c_2 + c_3,$$

$$c_1 \leq 2 \int_0^\tau dt \Delta E, \quad \longleftarrow \quad \| -i[H, \rho] \|_1 \leq 2\Delta E$$

$$c_3 \leq \sqrt{2\sigma \int_0^\tau dt \mathcal{A}(t)}. \quad \longleftarrow \quad \text{白石・布能・齊藤と同様にして}$$

散逸がない時には、弱いMandelstam-Tammの式となる。

量子マスター方程式が古典マスター方程式になる極限で白石・布能・齊藤の式になる。

# Vu・長谷川とその改良

$$\sigma \geq \sigma_{V0} := \frac{d_T(\rho(\tau), \rho(0))^2}{\int_0^\tau dt 2M(t)} \geq \sigma_{V1} := \frac{d_T(\rho(\tau), \rho(0))^2}{\int_0^\tau dt 2B(t)}$$

$$d_T(\rho(\tau), \rho(0)) := \sum_n |q_n(\tau) - q_n(0)| \quad \text{半古典的な距離}$$

$\{q_n(t)\}$  は  $\rho(t)$  の固有値を小さい順に並べたもの。

アクティビティ  $B(t) := \text{tr} \left[ \rho(t) \sum_k \gamma_k L_k^\dagger L_k \right]$

$$M(t) := \sum_k \sum_{m \neq n} \Psi(a_{mn}^{(k)}, a_{nm}^{(-k)})$$

$$M(t) \leq \mathcal{A}(t) \leq B(t)$$

T. V. Vu and Y. Hasegawa, PRL **126**, 010601 (2021).

T. V. Vu and K. Saito, arXiv:2206.2684.



# 注意

$dT$  は異なる量子状態の間でもゼロになる事がある。  
量子コヒーレンスを測れない。

$$\begin{aligned} \text{対角化 } \rho(t) &= \sum_n p_n(t) |n(t)\rangle \langle n(t)| \\ B(t) &:= \text{tr} \left[ \rho(t) \sum_k \gamma_k L_k^\dagger L_k \right] \\ &= \underbrace{\mathcal{A}(t)}_{\substack{\downarrow \text{古典極限} \\ A_c}} + \sum_n \sum_k p_n(t) \gamma_k |\langle n(t) | L_k | n(t) \rangle|^2 \end{aligned}$$

古典極限で、 $\sigma_{V1}$  は白石・布能・齊藤を再現するとは限らない  
( $\sigma_{V0}$  は再現する)

# Vu・長谷川の式の別証

T. V. Vu and Y. Hasegawa, PRL **126**, 010601 (2021)とは別の証明を紹介する。  
この論文の証明法は我々の研究で重要となる(第2部で解説する)。

$$d_V(\rho(\tau), \rho(0)) := \sum_n |p_n(\tau) - p_n(0)| \geq d_T(\rho(\tau), \rho(0))$$

白石・布能・齊藤の式の改良を示すのと同様にして、

$$\sigma \geq \frac{d_V(\rho(\tau), \rho(0))^2}{\int_0^\tau dt 2M(t)}$$

を得るので、Vu・長谷川の式の改良(よりタイトな式)が示された。

# 第2部

# 主要結果(1)

$$\sigma \geq \sigma_0 := \frac{\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1^2}{\int_0^\tau dt 2A_\varphi(t)}$$

相互作用描像でのトレース距離

$$\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1 \geq d_T(\rho(\tau), \rho(0))$$

$$d_T(\rho_2, \rho_1)$$

$$= \min_{V^\dagger V=1} \|V\rho_2V^\dagger - \rho_1\|_1$$

$$\tilde{\rho}(t) := U^\dagger(t)\rho(t)U(t)$$

$$\frac{d}{dt}U(t) = -iH(t)U(t)$$

$$A_\varphi(t) := \text{tr} \left( \tilde{\rho}(t) \frac{1}{4} \sum_k \gamma_k [\varphi, \tilde{L}_k]^\dagger [\varphi, \tilde{L}_k] \right)$$

$$\varphi(t) := \frac{\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0)}{|\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0)|}$$

$$2A_\varphi \leq B + \text{tr} \left( \varphi \tilde{\rho} \varphi \sum_k \gamma_k \tilde{L}_k^\dagger \tilde{L}_k \right)$$

$$|X| := \sqrt{X^\dagger X}$$

$$\leq B + \sum_k \gamma_k \|L_k\|_\infty^2$$

# 主要結果(2)

$$\sigma \geq \sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2,$$

$$\sigma_0 := \frac{\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1^2}{\int_0^\tau dt \, 2A_\varphi(t)},$$

$$\sigma_1 := \frac{\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1^2}{\int_0^\tau dt \, [B(t) + B'(t)]},$$

$$\sigma_2 := \frac{\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1^2}{\int_0^\tau dt \, [B(t) + B_\infty(t)]},$$

$$B'(t) := \text{tr} \left( \varphi \tilde{\rho} \varphi \sum_k \gamma_k \tilde{L}_k^\dagger \tilde{L}_k \right),$$

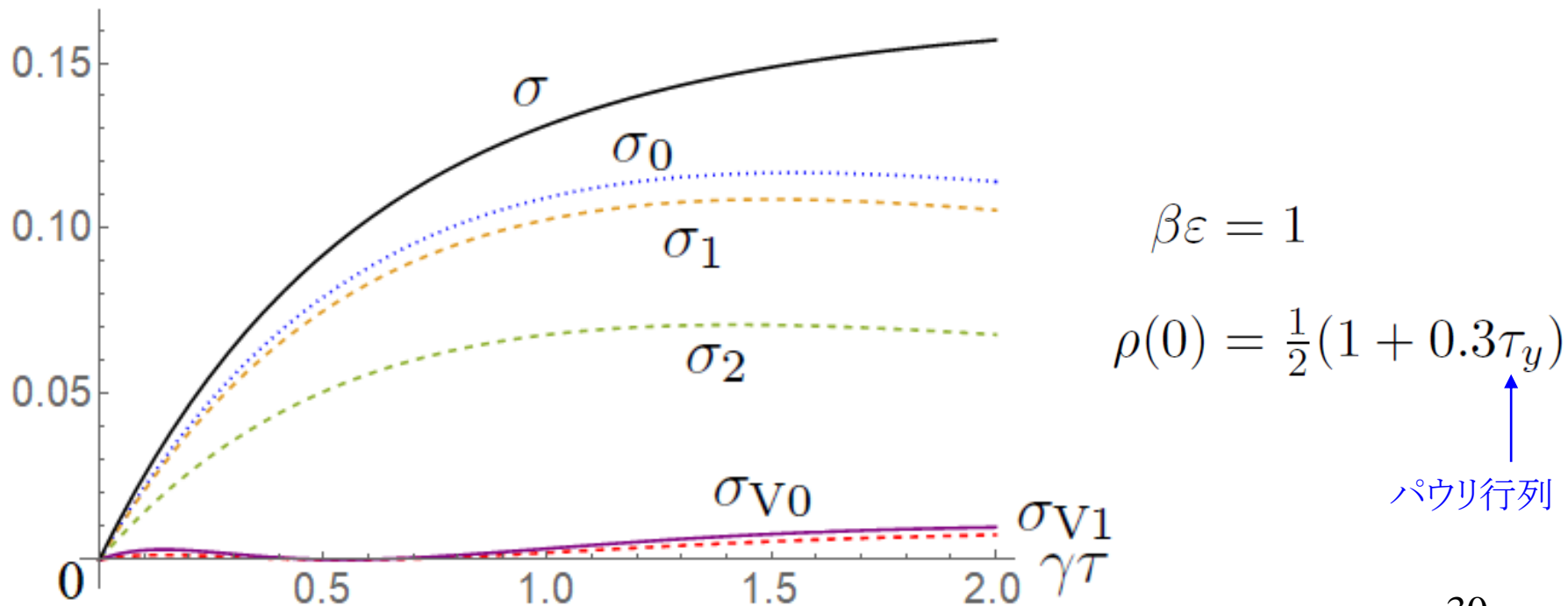
$$B_\infty(t) := \sum_k \gamma_k \|L_k\|_\infty^2.$$

古典極限で、 $\sigma_0$  は白石・布能・齊藤を再現する。

# 量子ドットでの比較

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[\varepsilon a^\dagger a, \rho] + \gamma[1 - f(\varepsilon)]\hat{D}[a](\rho) + \gamma f(\varepsilon)\hat{D}[a^\dagger](\rho)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1} \quad \hat{D}[L](\rho) := \left( L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}L^\dagger L\rho - \frac{1}{2}\rho L^\dagger L \right)$$

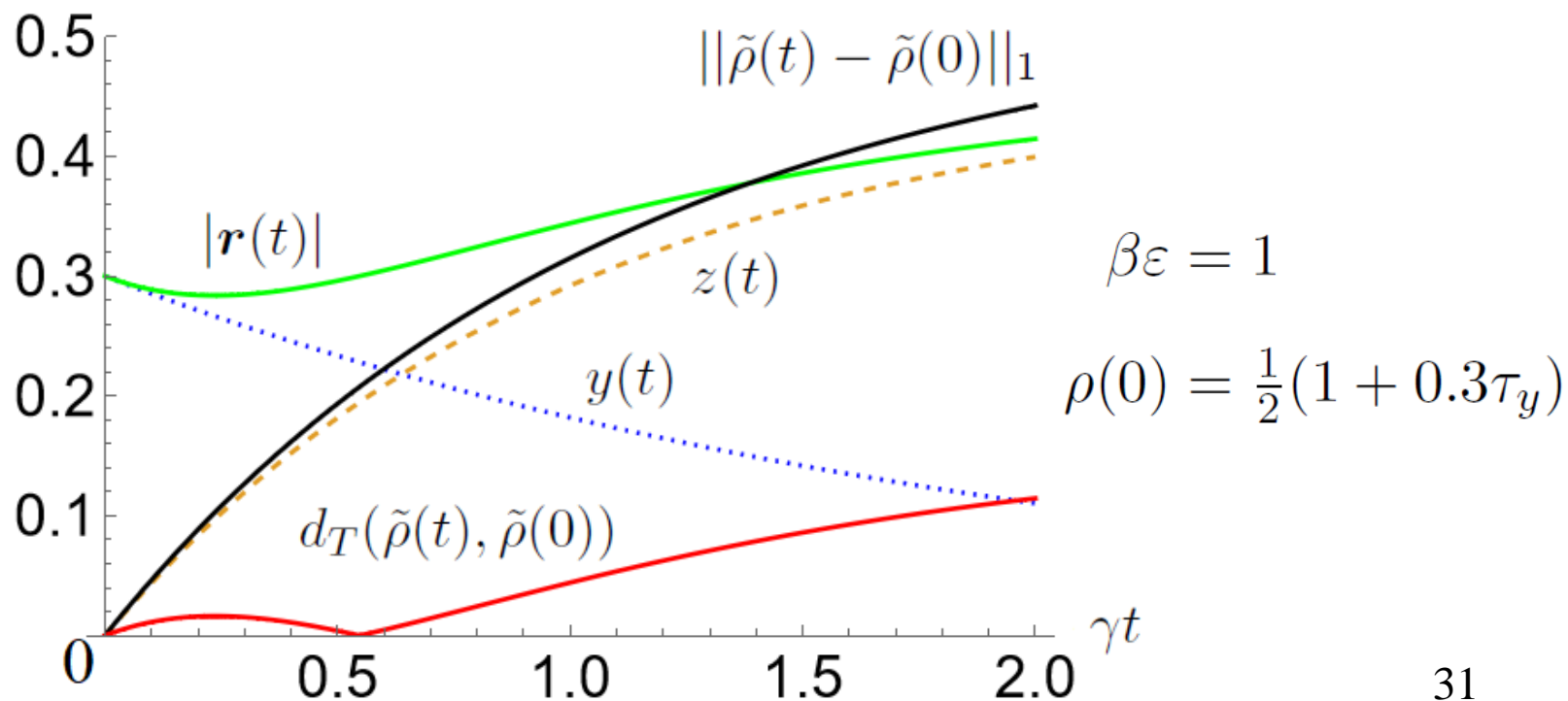


# 2準位系での状態間距離

$$\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{r}(t) \cdot \boldsymbol{\tau})$$

$$\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1 = |\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}(0)|, \quad |\mathbf{x}| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

$$d_T(\rho(\tau), \rho(0)) = \|\mathbf{r}(\tau)\| - \|\mathbf{r}(0)\| = d_T(\tilde{\rho}(\tau), \tilde{\rho}(0)),$$



# Qubit系(1)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i[H_S(t), \rho] + \alpha\gamma\varepsilon(t)n(\varepsilon(t))\hat{D}[\tau_+(\theta(t))](\rho) \\ & + \alpha\gamma\varepsilon(t)[n(\varepsilon(t)) + 1]\hat{D}[\tau_-(\theta(t))](\rho) \end{aligned}$$

$$H_S(t) = \frac{1}{2}\varepsilon(t)\tau_z(\theta(t)) \qquad n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

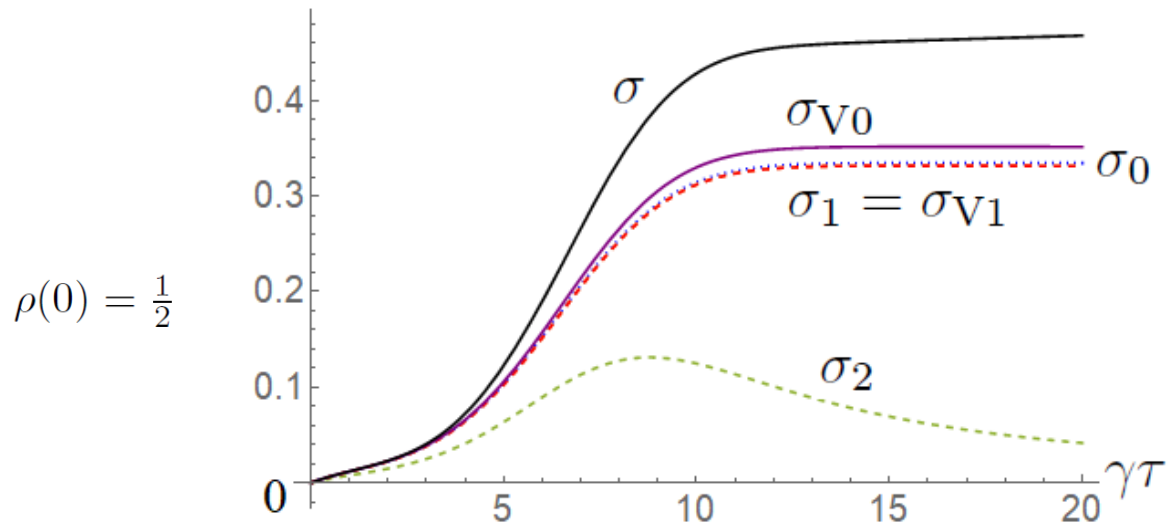
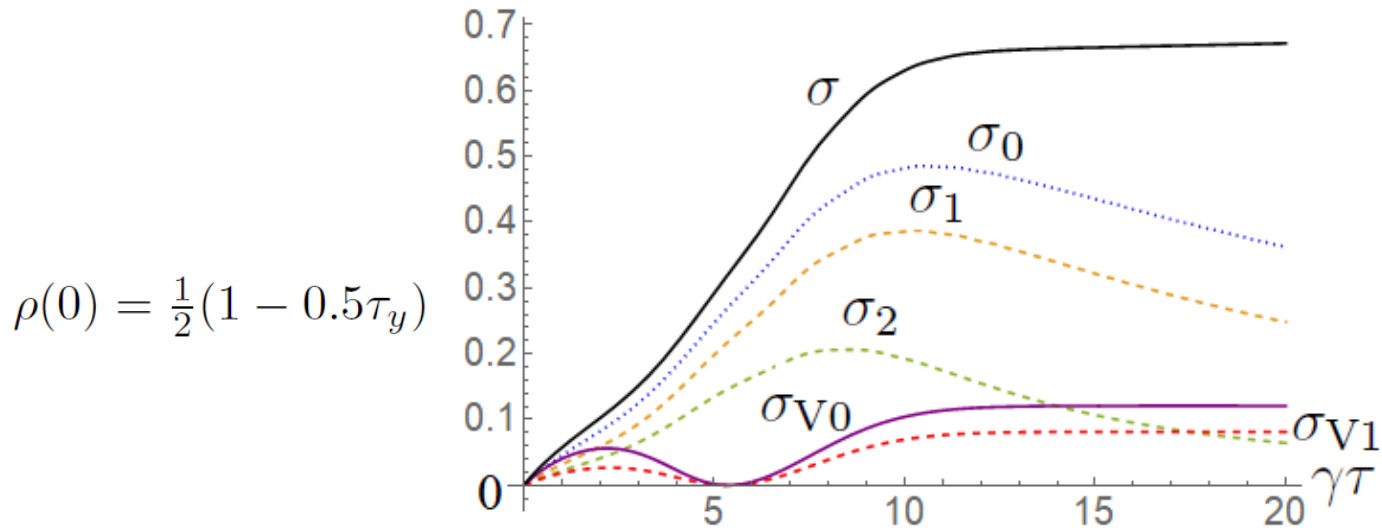
$$\tau_x(\theta) := \tau_x \cos \theta - \tau_z \sin \theta, \quad \tau_y(\theta) := \tau_y, \quad \tau_z(\theta) := \tau_z \cos \theta + \tau_x \sin \theta.$$

$$\theta(t) = \pi \left( \frac{t}{T} - 1 \right), \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sin^2 \frac{\pi t}{T}.$$

T. V. Vu and K. Saito, PRL **128**, 010602 (2022)の例。Non-optimal protocol.

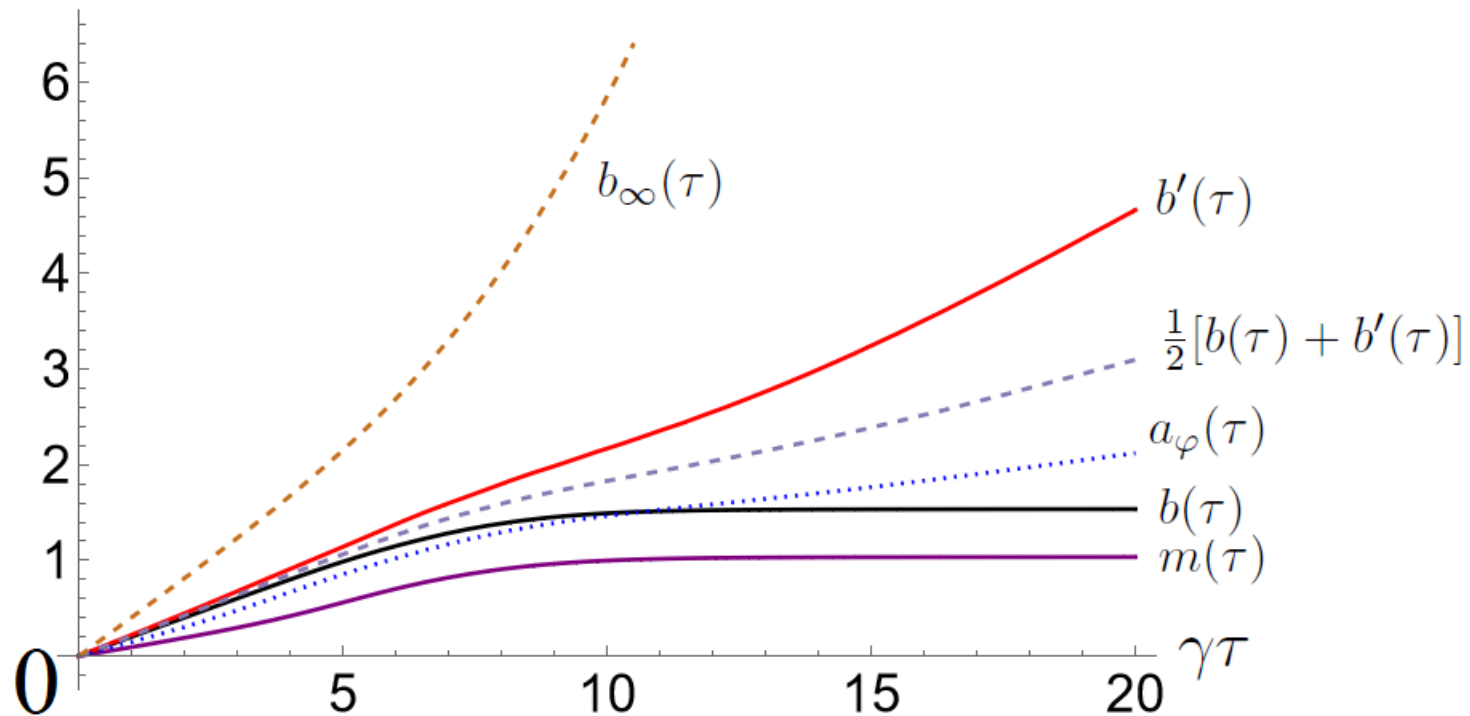


# Qubit系(2)



$\alpha = 0.2\beta, \beta\gamma = 1, \beta\varepsilon_0 = 0.4, \beta\varepsilon_1 = 10, \gamma T = 20.$

# アクティビティの時間積分



$$\rho(0) = \frac{1}{2}(1 - 0.5\tau_y)$$

$$\alpha = 0.2\beta, \beta\gamma = 1, \beta\varepsilon_0 = 0.4, \beta\varepsilon_1 = 10, \gamma T = 20.$$

# 主要結果の導出(1)

$$\{\rho\}_k(X) := \int_0^1 ds (\gamma_{-k}\rho)^s X(\gamma_k\rho)^{1-s}$$

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle_{\tilde{\rho}, k} := \text{tr} [X^\dagger \{\tilde{\rho}\}_k(Y)] \quad \text{半内積} \quad \gamma_{-k} = \gamma_{b, a, -\omega}$$

$$(\langle\langle X, Y \rangle\rangle_{\tilde{\rho}, k})^* = \langle\langle Y, X \rangle\rangle_{\tilde{\rho}, k}$$

$$\|X\|_{\tilde{\rho}, k}^2 := \langle\langle X, X \rangle\rangle_{\tilde{\rho}, k} \geq 0$$

$$\frac{d}{dt} \text{tr}[f(X(t))] = \text{tr} \left[ f'(X(t)) \frac{dX(t)}{dt} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0)\|_1 &= \text{tr} \left[ \varphi(t) \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \right] \quad \varphi(t) := \frac{\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0)}{|\tilde{\rho}(t) - \tilde{\rho}(0)|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \langle\langle [\tilde{L}_k, \varphi(t)], [\tilde{L}_k, -\ln \tilde{\rho} - \beta_b \tilde{H}_S] \rangle\rangle_{\tilde{\rho}, k}. \end{aligned}$$

# 散逸項の変形

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) &= \sum_k \gamma_k \hat{D}[\tilde{L}_k](\tilde{\rho}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k [\tilde{L}_k^\dagger, \{\tilde{\rho}\}_k([\tilde{L}_k, -\ln \tilde{\rho} - \beta_b \tilde{H}_S])] \end{aligned}$$

第2等号で以下の公式を用いた:

$$\begin{aligned} &\{\rho\}_k([X, \ln \rho] + \beta_b \omega X) \\ &= \int_0^1 ds (\gamma_{-k} \rho)^s (X \ln \rho - \ln \rho X - \beta_b \omega X) (\gamma_k \rho)^{1-s} \\ &= -\gamma_k \int_0^1 ds \frac{d}{ds} [e^{-s\beta_b \omega} e^{s \ln \rho} X e^{(1-s) \ln \rho}] \\ &= \gamma_k X \rho - \gamma_{-k} \rho X. \end{aligned}$$

# 主要結果の導出(2)

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1 &= \frac{1}{2} \sum_k \int_0^\tau dt \langle\langle [\tilde{L}_k, \varphi(t)], [\tilde{L}_k, -\ln \tilde{\rho} - \beta_b \tilde{H}_S] \rangle\rangle_{\tilde{\rho}, k} \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_k \int_0^\tau dt \sqrt{\left\| \left\| [\tilde{L}_k, \varphi] \right\|_{\tilde{\rho}, k}^2 \left\| [\tilde{L}_k, -\ln \tilde{\rho} - \beta_b \tilde{H}_S] \right\|_{\tilde{\rho}, k}^2 \right.} \\
 &\leq \sqrt{\int_0^\tau dt \underbrace{\frac{1}{2} \sum_k \left\| [\tilde{L}_k, \varphi] \right\|_{\tilde{\rho}, k}^2}_{\leq 2A_\varphi}} \\
 &\quad \times \sqrt{\int_0^\tau dt \underbrace{\frac{1}{2} \sum_k \left\| [\tilde{L}_k, -\ln \tilde{\rho} - \beta_b \tilde{H}_S] \right\|_{\tilde{\rho}, k}^2}_{= \text{エントロピー生成率}}}
 \end{aligned}$$

コーシー・シュワルツの不等式  $|\langle\langle X, Y \rangle\rangle_{\tilde{\rho}, k}| \leq \sqrt{\|X\|_{\tilde{\rho}, k}^2 \|Y\|_{\tilde{\rho}, k}^2}$

# Vu・長谷川の導出

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_n p_n(t) |\tilde{n}(t)\rangle \langle \tilde{n}(t)| \quad \text{対角化}$$

$$\tilde{\phi}(t) := \sum_n c_n |\tilde{n}(t)\rangle \langle \tilde{n}(t)|, \quad c_n = \text{sign}(p_n(\tau) - p_n(0))$$

$$d_V(\tilde{\rho}(\tau), \tilde{\rho}(0)) = \sum_n |p_n(\tau) - p_n(0)| = \text{tr} \int_0^\tau dt \tilde{\phi}(t) \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t)$$

T. V. Vu and Y. Hasegawa, PRL **126**, 010601 (2021).

# シュレーディンガー描像でのトレース距離

$$\begin{aligned} \|\rho(\tau) - \rho(0)\|_1 &\leq \int_0^\tau dt \left\| \frac{d\rho}{dt} \right\|_1 \\ &\leq \int_0^\tau dt \left( \| -i[H_S, \rho] \|_1 + \|\mathcal{D}(\rho)\|_1 \right) \end{aligned}$$

極分解  $\mathcal{D}(\rho) = V^\dagger \sqrt{[\mathcal{D}(\rho)]^\dagger \mathcal{D}(\rho)} \quad (V^\dagger V = 1)$

$$A_V(t) := \text{tr} \left( \rho \sum_k \gamma_k \frac{1}{4} [V, L_k]^\dagger [V, L_k] \right)$$

$$\|\rho(\tau) - \rho(0)\|_1 \leq \int_0^\tau dt \underbrace{\| -i[H_S, \rho] \|_1}_{\leq 2\Delta E} + \underbrace{\sqrt{\sigma} \sqrt{\int_0^\tau dt 2A_V(t)}}_{\text{白石・布能・齊藤 type}}$$

Mandelstam-Tamm type

# まとめ

Lindblad型の量子マスター方程式に従う系において、エントロピー生成と相互作用描像のトレース距離との間の普遍的な関係式

$$\sigma \geq \frac{\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1^2}{\int_0^\tau dt 2A_\varphi(t)}$$

を導出した。

$$\|\tilde{\rho}(\tau) - \tilde{\rho}(0)\|_1 \geq d_T(\rho(\tau), \rho(0))$$

相互作用描像のトレース距離は、Vu・長谷川の距離より小さくなることはない  
ので、我々のバウンドはVu・長谷川のものより劇的に良くなることがある。

S. Nakajima and Y. Utsumi, New. J. Phys. **24**, 095004 (2022).