

統一場理論からゲージ理論へ

中嶋 慧

October 20, 2020

Abstract

このノートでは、まず最初の統一場理論であるワイルのゲージ理論 (1918) を解説する。次に、それが量子力学を通して、どのようにゲージ原理につながったかを見る。その後、2番目の統一場理論であるカルツァ・クライン理論 (1921, 26) を解説する。次に、初期のゲージ理論 (O. クライン, パウリ, ショウ, ヤン・ミルズ) について解説する。最後に、内山龍雄のゲージ場の一般論を解説する。

Contents

1	要約+ α	3
2	ワイルのゲージ理論	5
2.1	ワイルのゲージ変換	5
2.2	ラグランジアン密度	6
2.3	参考文献	6
3	ゲージ原理への発展	7
3.1	量子力学とゲージ原理	7
3.2	ゲージ理論への発展	8
3.3	参考文献	8
4	カルツァ・クライン理論	9
4.1	計量	9
4.2	ラグランジアン密度	10
4.3	参考文献	11
5	初期のゲージ理論	12
5.1	クライン (SU(2), 1938 年)	12
5.2	パウリ (SO(3), 1953 年)	15
5.3	ショウ (SU(2), 1955 年)	16
5.4	ヤン・ミルズ (SU(2), 1954 年)	18
5.5	いくつかのコメント	19
5.6	参考文献	19

6	内山龍雄の一般ゲージ場論	20
6.1	内山龍雄の動機と視点	20
6.2	ゲージ場の導入	20
6.3	ゲージ場の変換則	23
6.4	ラグランジアン密度の形：Noether の第 2 定理の応用	25
6.5	ゲージ場の曲率	25
6.5.1	共変微分と曲率との関係	25
6.5.2	曲率の変換則	26
6.5.3	曲率の共変微分	27
6.6	ゲージ場の運動方程式	28
6.7	ゲージ場の再定義	30
6.7.1	G_r の規格化	30
6.7.2	ゲージ場の再定義	30
6.8	いくつかのコメント	31
6.9	参考文献	31
A	一般相対論	33
A.1	接続と曲率テンソル	33
A.2	重力場の作用	34
B	カルツァ・クライン理論のラグランジアン密度	36
C	不変変分論	38
C.1	準備	38
C.2	Noether の第 1 定理	39
C.3	Noether の第 2 定理	40

1 要約+ α

1915年に、アインシュタインの一般相対論が完成した。これは、計量や接続(平行移動)や曲率テンソルといった、幾何学的な言葉で定式化された。一方、当時、重力場以外に知られている場の理論は電磁場の理論のみであった。電磁場の定式化には計量, 接続, 曲率といった幾何学的な言葉は使われておらず、重力場とは異質に見えた。そこで、重力場と電磁場の両方を幾何学的な言葉で定式化できないだろうか?という疑問が生じた。この定式化を試みた理論を(またはそれらの理論の総称を)統一場理論という。

最初の統一場理論として、ワイルのゲージ理論が現れた。これは平行移動の概念を拡張し、平行移動によってベクトルの大きさも変化するとしたものである。平行移動による大きさの変化を特徴づける量として、ベクトルポテンシャル(と同定されるもの)が現れる。また、ワイルは、理論がゲージ変換(gauge = 基準寸法 = 規格)と呼ばれる、計量の局所変換に対して共変的だと仮定した。このゲージ変換が、電磁場の「ゲージ変換」や「ゲージ理論」の名前の由来である。

ワイルのゲージ理論には欠点があったが、ゲージ不変性や、理論に現れるスケール因子が、量子力学の研究を通して再解釈され、ゲージ原理という概念へと発展した。ゲージ原理は、物質場の位相の局所変換に対する共変性を要請することで、電磁場と物質場との相互作用の形が自動的に決まるというものである。

ところで、1921年にカルツァ、1926年に独立にO. クラインによって、カルツァ・クライン理論と呼ばれる5次元の統一場理論が発表された。また、フォックも独立に、クラインとほぼ同時に、同様の5次元理論を研究した。クラインとフォックの動機は量子力学の研究であり、ハミルトン・ヤコビ的な視点から5次元の統一場理論に達したようである。

カルツァ・クライン理論に続いて、5次元をどうにか避ける試みがいくつもなされたが、それらはその後の発展にとって、あまり重要ではなかった。また、その外にも様々な統一場理論が考えられたが、その後の物理や数学の発展に重要だったのは、最初の2つの統一場理論であるワイルのゲージ理論とカルツァ・クライン理論であった。

湯川秀樹の中間子論の後に、核力についての研究が盛んになった。この核力の研究の中で、初期のゲージ理論が生まれた。O. クラインの1938年の理論は、カルツァ・クライン理論を拡張した奇妙な理論であり、奇跡的にSU(2)ゲージ場の強さが現れた。この理論は長い間忘れられていて、その後のゲージ理論の発展には影響しなかった。

1953年頃になると、ゲージ原理を核力の場合に、つまり、非可換ゲージ場の場合に拡張しようとする試みが同時に複数の研究者によってなされた:

- W. Pauli(SO(3), 1953年, 未発表)
- C. N. Yang および R. Mills(SU(2), 1954年)[9]
- R. Shaw(SU(2), 1955年)
- 内山龍雄(一般の線形リー群, 重力場も含む, 発表は1956年)[5, 3].

パウリのゲージ理論は、核力についての研究が動機であるが、カルツァ・クライン理論の高次元(6次元)版をもとにしていた。Shaw および ヤン・ミルズのもの、アイソスピン2重項に対するSU(2)ゲージ理論であった。Shawの理論はSU(2)に特化していたが、ヤン・ミルズ(1954年10月1日出版)のものは一般の線形リー群の場合に拡張可能な形であった。

ところで、内山龍雄の1954年1月にはほぼ完成していた理論¹⁾は、一般の線形リー群についてのゲージ理論であり、ローレンツ群に対するゲージ場として重力場をも含むものだった。内山は発表が遅れたため、ヤン・ミルズにプライオリティを取られてしまったが、内山の理論は非常に興味深く、教育的だと思われるので、このノートでは詳しく解説する。ただし、ゲージ場としての重力場についての解説は、やや高度になるため、今回は割愛し、参考文献に譲る(次章以降の各章には、参考文献の節を設けた)。

¹⁾[6]の最終章「痛恨記」または[7]の「痛恨の記」によると、内山の研究は1954年1月にはほぼ完成し(論文は3月には完成)、5月か6月の京都大学基礎物理学研究所での研究会で初めて口頭発表された。「痛恨記」には、その後、発表が遅れた経緯が詳しく書かれている。

2 ワイルのゲージ理論

この章では、 D 次元時空を考える。この章および第4章を読むのに必要な一般相対論の記号の定義は、付録Aで与えた。

2.1 ワイルのゲージ変換

一般相対論では、平行移動で、ベクトルの大きさ

$$l(x) \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu}(x)V^\mu(x)V^\nu(x) \quad (2.1)$$

は不変だと仮定した。Weylの理論では、ベクトルの大きさは、平行移動で不変ではない。大きさ $l(x)$ のベクトルを、 x から $x + \Delta x$ へ平行移動したとき、

$$l_{\parallel}(x + \Delta x) = l(x)[1 - \Delta x^\mu \varphi_\mu(x)] \quad (2.2)$$

となると仮定する。 φ_μ は共変ベクトルであり、後でベクトルポテンシャルと同定される。ワイルの理論では、異なる点のベクトルの大きさを比較する事は意味をなさなくなる。

ベクトルの平行移動は、

$$V_{\parallel}^\mu(X + \Delta x) = V^\mu(x) - \Delta x^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\mu V^\sigma(x) \quad (2.3)$$

で定義される。また、

$$l_{\parallel}(x + \Delta x) = g_{\mu\nu}(x)V_{\parallel}^\mu(X + \Delta x)V_{\parallel}^\nu(X + \Delta x) \quad (2.4)$$

である。振率がない(つまり、 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$)と仮定すると、(A.8)を得るのと同様にして、

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu}, \quad \Gamma_{\lambda\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(D_\mu g_{\lambda\nu} + D_\nu g_{\lambda\mu} - D_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

を得る。ただし、

$$D_\lambda g_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_\lambda + \varphi_\lambda)g_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

である。 $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ は、

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\varphi_\mu g_{\lambda\nu} + \varphi_\nu g_{\lambda\mu} - \varphi_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (2.7)$$

とも書ける。 $\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ はクリストッフエルの3指記号(A.9)である。

さてここで、各点におけるゲージ (gauge, 基準寸法, 規格) の変換

$$g'_{\mu\nu}(x) = e^{\lambda(x)}g_{\mu\nu}(x) \quad (2.8)$$

を考える。変換後の量に'を付けると、

$$l'_{\parallel}(x + \Delta x) = l'(x)[1 - \Delta x^\mu \varphi'_\mu(x)] \quad (2.9)$$

である。左辺は、 Δx の1次までで、

$$l'_{\parallel}(x + \Delta x) = e^{\lambda(x+\Delta x)} l_{\parallel}(x + \Delta x) = e^{\lambda(x)} [l_{\parallel}(x + \Delta x) + l(x) \Delta x^{\mu} \partial_{\mu} \lambda] \quad (2.10)$$

となる。上式の右辺に (2.2) を代入すると、

$$\begin{aligned} l'_{\parallel}(x + \Delta x) &= e^{\lambda(x)} l(x) \{1 - \Delta x^{\mu} (\varphi_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \lambda)\} \\ &= l'(x) \{1 - \Delta x^{\mu} (\varphi_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \lambda)\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。よって、

$$\varphi'_{\mu}(x) = \varphi_{\mu}(x) - \partial_{\mu} \lambda(x) \quad (2.12)$$

となる。これは、電磁場のゲージ変換と同じ形をしているため、ワイルは $\varphi_{\mu}(x)$ を (定数倍を除いて) 電磁場と同定した。なお、電磁場のゲージ変換の名前の由来が、ゲージの変換 (2.8) である。

2.2 ラグランジアン密度

ワイルはゲージ変換 (2.8), (2.12) の下で理論が不変だと仮定した。そのため、ラグランジアン密度 $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ もゲージ不変でなくてはならない。ところで、

$$\sqrt{-g'} = e^{\frac{D}{2}\lambda(x)} \sqrt{-g} \quad (2.13)$$

である。よって、

$$\mathcal{L}' = e^{-\frac{D}{2}\lambda(x)} \mathcal{L} \quad (2.14)$$

でなくてはならない。接続はゲージ不変 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ であり²⁾、曲率テンソル $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ もゲージ不変である。以下、 $D = 4$ とする。 \mathcal{L} の候補として、

$$\mathcal{L} = a_1 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + a_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + a_3 R^2 + a_4 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.15)$$

があり得る。ただし、 $F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mu}\varphi_{\nu} - \partial_{\nu}\varphi_{\mu}$ であり、 a_1, a_2, a_3, a_4 は定数でゲージ不変である。 $\sqrt{-g}R$ はゲージ不変でなく、 $\sqrt{-g}\mathcal{L}$ の候補になり得ない。

2.3 参考文献

ワイルの理論は、ワイル『空間・時間・物質』[10] に詳しく解説されている。また、パウリ[11] や内山[3] にもワイル理論の解説がある。特に、後者[3] は詳しい。[1] にはワイルの論文がある。サイト[15] にも良い解説がある。

²⁾(2.12) より、 $D'_{\lambda} g'_{\mu\nu} = e^{\lambda(x)} D_{\lambda} g_{\mu\nu}$ であり、よって、 $\Gamma'_{\lambda\mu\nu} = e^{\lambda(x)} \Gamma_{\lambda\mu\nu}$ となる。また、 $g'^{\mu\nu} = e^{-\lambda} g^{\mu\nu}$ なので、 $\Gamma'^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ となる。

3 ゲージ原理への発展

ワイルのゲージ理論は、量子力学の出現とともに、シュレーディンガー、ロンドン、フォック、ワイル自身によって再解釈され、ゲージ原理へと生まれ変わった。ゲージ原理は、現在物理学の基礎であるゲージ理論へと発展した。その様子を以下で見てみよう。

3.1 量子力学とゲージ原理

シュレーディンガーは、1922年³⁾の論文「電子の量子軌道の注目すべき性質について」(Z. Phys. **12**, 13 (1922))において、ワイルのスケール因子 $\exp(-\int dx^\mu \varphi_\mu)$ を位相因子として解釈する可能性を指摘した。シュレーディンガーは、ワイルの φ_μ とベクトルポテンシャル⁴⁾ A_μ とを

$$\varphi_\mu = \frac{1}{\gamma} e A_\mu \quad (3.1)$$

によって結び付け、スケール因子

$$\exp\left(-\frac{e}{\gamma} \int dx^\mu A_\mu\right) \quad (3.2)$$

において、 γ として、

$$\gamma = \frac{\hbar}{\sqrt{-1}} \quad (3.3)$$

を取った。この時、スケール因子は、位相因子

$$\exp\left(-i\frac{e}{\hbar} \int dx^\mu A_\mu\right) \quad (3.4)$$

となる。

Fritz London は、1927年の論文「ワイルの理論の量子力学的説明」(Z. Phys. **42**, 375 (1927))において、ワイルの因子を再解釈し、量子力学における位相因子を発見した。この論文では、カルツァ・クライン理論とは別の文脈で5次元空間が使われた。

V. Fock は、1927年の論文「荷電質点に対する波動および運動方程式の不変性について」(Z. Phys. **39**, 226 (1927))で、量子力学におけるゲージ不変性に初めて気が付いた。この論文は、カルツァ・クライン理論とほぼ同じ5次元時空で議論されていた⁵⁾。この論文では、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ および $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla f$ に対する波動関数 ψ と ψ' とは、絶対値1の因子 $e^{ief/\hbar}$ だけ異なり、それゆえ同じ連続性を持っており、互いに同等である事が示された。

ワイルは、1928年に出版した『群論と量子力学』で「ゲージ不変原理」という言葉を用いた。その内容は、電磁場 A_μ の下では波動関数において、 ∂_μ を $\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar} A_\mu$ に置き換えなければならず、波動関数 ψ と電磁場 A_μ の方程式は、同時に、

$$\psi \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar}\lambda}\psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\lambda \quad (3.5)$$

³⁾ド・ブローイの論文以前であり、波動力学が誕生する以前である。

⁴⁾以下、ベクトルポテンシャルを電磁場とも呼ぶ。

⁵⁾この5次元理論の研究は、クラインとは独立のようである。

の置き換えをしても不変である、というものである。ワイルはフォックを引用していない。また、ワイルは、ディラック場を一般相対論に取り入れた論文「電子と重力」(Z. Phys. **56**, 330 (1929))⁶⁾で、再び「ゲージ不変原理」(3.5)を述べている。ただし、この場合、 ψ はディラック場である。

3.2 ゲージ理論への発展

以上のように、ワイルのゲージ理論は、電磁場と物質場との相互作用を規定する原理へと発展した。ゲージ原理という考え方が広まったことに事により、これを非可換ゲージ場の場合へと拡張する研究が、1953年から1955年頃に、W. Pauli(SO(3), 1953年, 未発表), C. N. Yang および R. Mills(SU(2), 1954年), R. Shaw(SU(2), 1955年), 内山龍雄(一般の線形リー群, 重力場も含む, 発表は1956年)[5, 3]によって、独立に行われた。それより以前に、クラインによって1938年にSU(2)ゲージ理論の研究が行われていた。これらは全て、核力の研究が動機であった⁷⁾。

第5章では、O. クライン, パウリ, ヤン・ミルズ, ショウのゲージ理論を解説する。第6章では、内山の一般ゲージ場論を解説する。クラインとパウリの理論は、2つ目の統一場理論であるカルツァ・クライン理論を変形したものであるため、次章ではカルツァ・クライン理論を解説する。

3.3 参考文献

ワイルのゲージ理論からゲージ原理への発展については、[1, 2]が詳しい。

⁶⁾フォックも独立に、1929年の論文「電子のディラック理論の幾何学化」(Z. Phys. **57**, 261 (1929))で、ディラック場を一般相対論に取り入れた。

⁷⁾核力の研究が盛んになったのは、1935年の湯川秀樹の中間子論の影響が大きい。

4 カルツァ・クライン理論

この章では、T. Kaluza (1921) と O. Klein (1926) による 5 次元の理論 (カルツァ・クライン理論) を解説する。この章では、ラテン文字の添え字は 0 から 4 を表し、ギリシャ文字の添え字は 0 から 3 を表すものとする。

4.1 計量

この理論では、通常の 4 次元時空を表す座標 x^μ の他に、もう 1 つの座標 x^4 が登場する。この 5 次元の多様体の計量を γ_{ij} とする。これは、 x^4 には依らないとする。座標変換

$$x^\mu = \psi^\mu(x'^\nu), \quad (4.1)$$

$$x^4 = x'^4 + \psi^4(x'^\nu) \quad (4.2)$$

を考える。 $\psi^i(x'^\nu)$ は、 x'^4 には依らない。このとき、 γ_{ij} の変換則は、

$$\gamma'_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^i} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j} \gamma_{ab} \quad (4.3)$$

であり、

$$\gamma'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \gamma_{4\beta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\nu} \gamma_{\alpha 4} + \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\nu} \gamma_{44}, \quad (4.4)$$

$$\gamma'_{4\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \gamma_{4\alpha} + \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu} \gamma_{44}, \quad (4.5)$$

$$\gamma'_{44} = \gamma_{44} \quad (4.6)$$

となる。 γ_{44} は不変である。以下、 $\alpha = \gamma_{44}$ は定数とする。また、

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha, \quad (4.7)$$

$$dx'^4 = dx^4 - \frac{\partial \psi^4}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (4.8)$$

である。今、

$$\alpha \beta A_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{4\mu} = \gamma_{\mu 4}, \quad (4.9)$$

$$g_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{\mu\nu} - \alpha \beta^2 A_\mu A_\nu \quad (4.10)$$

と置く。 β は未定の定数である。この時、

$$d\theta \stackrel{\text{def}}{=} dx^4 + \beta A_\mu dx^\mu, \quad (4.11)$$

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.12)$$

は不変である。5 次元の計量は、

$$d\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{ij} dx^i dx^j = ds^2 + \alpha d\theta^2 \quad (4.13)$$

となる。 $g_{\mu\nu}$, A_μ の変換則は、

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (4.14)$$

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi^4}{\partial x'^\mu} \quad (4.15)$$

である。特に、 $x'^\mu = x^\mu$, $\psi^4 = -\beta\lambda(x^\mu)$ の場合は、

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} \quad (4.16)$$

となり、これはゲージ変換と同じ形をしている。また、 $\psi^4 = 0$ の場合は、(4.14), (4.15) は、4次元時空での一般座標変換となる。そこで、カルツァは、 A_μ を電磁場、 $g_{\mu\nu}$ を重力のポテンシャルと同定した。

4.2 ラグランジアン密度

γ_{ab} , $g_{\mu\nu}$ に対する (A.20) の G を、それぞれ 5G と G とすると、

$${}^5G = G - \frac{\alpha\beta^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.17)$$

となる⁸⁾。ここで、 $F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ であり、ギリシャ文字の添え字の上げ下げは、 $g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ によって行った。導出の概要は、付録 B を参照。定数 α , β を、

$$\alpha\beta^2 = \frac{2\kappa}{\mu_0} \quad (4.18)$$

と選べば(このとき $\alpha > 0$ となる)、

$${}^5G = G - \frac{\kappa}{2\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.19)$$

となる。 κ はアインシュタイン定数である。

場の方程式を導く作用としては、

$$S_5 = \int d^5x \sqrt{-\gamma} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2c\kappa} {}^5G + \mathcal{L}_{\text{mat}} \right) \quad (4.20)$$

を採用する。ここで、 \mathcal{L}_{mat} は重力場、電磁場以外の「物質」場のラグランジアン密度で、 x^4 には依存しないと仮定する。 l は長さの次元の定数である。また、

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \det(\gamma_{ij}) = \alpha g, \quad g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (4.21)$$

⁸⁾ γ_{ab} , $g_{\mu\nu}$ から作られるリーマン接続でのスカラー曲率を、それぞれ 5R , R とすると、

$${}^5R = R - \frac{\alpha\beta^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

となる。

である。\$S_5\$ は、次の形に書く事が出来る：

$$S_5 = S \frac{\sqrt{\alpha} \int dx^4}{l}, \quad (4.22)$$

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2c\kappa} {}^5G + \mathcal{L}_{\text{mat}} \right). \quad (4.23)$$

\$S\$ についての最小作用の原理から場の方程式が得られる。\$S\$ は、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2c\kappa} G - \frac{1}{4\mu_0 c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{mat}} \right) \quad (4.24)$$

となり、一般相対論の作用と一致する。

通常、\$x^4\$ はコンパクト化されていて、\$L \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\alpha} \int dx^4\$ は有限と仮定される。このとき、\$l = L\$ とする。\$L\$ は非常に短いために、通常は \$x^4\$ 方向の次元の存在に気付かないと考える。

4.3 参考文献

カルツァ・クライン理論については [3] が詳しい。[11] にも解説がある。[1] には、カルツァおよびクラインの原論文がある。また、この2つの論文の邦訳「Kaluza と Klein の論文の和訳 I」, 「Kaluza と Klein の論文の和訳 II」が存在する。サイト [15] には詳しい解説とラグランジアン密度の詳しい計算がある。高次元・非可換ゲージ理論版は [12, 13] が詳しい。カルツァ・クライン理論およびその非可換ゲージ理論版 [12, 13] のラグランジアン密度の計算は私のノート [16] を参照のこと。

5 初期のゲージ理論

この章の参考文献は [1] である。そこには、クラインの 1938 年の論文、パウリの A. Pais への手紙 (1953 年)、ショウの 1955 年の論文、ヤン・ミルズの 1954 年の有名な論文、内山の論文 [5] と、それらの解説がある。

§ 5.1, § 5.2 を読むには、第 4 章のカルツァ・クライン理論の知識が必要である。

以下では、 $\hbar = c = \mu_0 = 1$ とする。

5.1 クライン (SU(2), 1938 年)

クラインは、中間子場と核子場の相互作用を考えた。その際、5 番目の次元 x^4 を考え、場は $e^{-iqx^4/\beta}$ の x^4 依存性を持つと仮定した。ここで、 q は電荷である。 β は未定の定数である。

この節では、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、ラテン文字の添え字は 0, 1, 2, 3, 4 を表すものとする。クラインは、計量 γ_{ab} を次の形に仮定した：

$$\gamma_{44} = 1, \quad (5.1)$$

$$\gamma_{4\mu} = \gamma_{\mu 4} = \beta\chi_\mu, \quad (5.2)$$

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \beta^2\chi_\mu\chi_\nu. \quad (5.3)$$

逆行列は、

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

$$\gamma^{4\mu} = \gamma^{\mu 4} = -\beta\chi^\mu, \quad (5.5)$$

$$\gamma^{44} = 1 + \beta^2\chi_\mu\chi^\mu \quad (5.6)$$

である。ここで、 $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆で、ギリシャ文字は $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ で上げ下げした。通常のカルツァ・クライン理論では、 χ_μ は電磁場と同定される。クラインの 1938 年の理論では、 χ_μ は、核子のアイソスピン 2 重項

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

(ψ_n, ψ_p はディラック場で、それぞれ中性子、陽子を表す) に作用する 2 次行列

$$\chi_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu & \tilde{B}_\mu \\ B_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

とされた。 A_μ は x^4 に依らないが、 \tilde{B}_μ, B_μ は、

$$\beta\partial_4\tilde{B}_\mu = -ie\tilde{B}_\mu, \quad (5.9)$$

$$\beta\partial_4B_\mu = ieB_\mu \quad (5.10)$$

に従うものと仮定する。 e は電気素量である。 A_μ は電磁場と同定され、 \tilde{B}_μ, B_μ は正および負の中間子と同定される。 $\bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{\psi}_n, \bar{\psi}_p)$ とし、 $\bar{\psi}_A (A = n, p)$ は $\bar{\psi}_A = \psi_A^\dagger i\epsilon^0$ によって定義される。 ϵ^a

の定義は後述の (5.17) である。\$x^4\$ 依存性は、

$$\beta\partial_4\psi = ie \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_p \end{pmatrix} = ie \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi, \quad (5.11)$$

$$\beta\partial_4\bar{\psi} = -ie(0, \bar{\psi}_p) \quad (5.12)$$

を仮定する。

\$\psi\$ のラグランジアン密度の候補は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\psi}(\gamma^a\partial_a + m)\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^4\partial_4 + m)\psi \\ &= -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^4\frac{ie}{\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m)\psi \end{aligned} \quad (5.13)$$

である。ここで、\$\gamma^a\$ は、

$$\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) = \gamma^{ab} \quad (5.14)$$

で定義される。\$\gamma_a \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{ab}\gamma^a\$ とすると、

$$\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma_b + \gamma_b\gamma^a) = \delta_b^a, \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a) = \gamma_{ab} \quad (5.16)$$

である。今、

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_a\varepsilon_b + \varepsilon_b\varepsilon_a) = \eta_{ab} \quad (\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)) \quad (5.17)$$

で \$\varepsilon_a\$ を定義し、\$\gamma_4 = \varepsilon_4\$ と置く。\$\gamma_4 = \gamma_{4a}\gamma^a = \gamma^4 + \beta\chi_\mu\gamma^\mu\$ なので、

$$\gamma^4 = \varepsilon_4 - \beta\gamma^\mu\chi_\mu \quad (5.18)$$

となる⁹⁾。この表式を (5.13) に代入し、\$\varepsilon_4\$ に比例する項を落として、

$$\mathcal{L}' = -\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi, \quad (5.19)$$

$$D_\mu\psi \stackrel{\text{def}}{=} \left[\partial_\mu - ie\chi_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \psi \quad (5.20)$$

を得る。

上の \$D_\mu\psi\$ の表式は、SU(2) ゲージ理論の共変微分と少し異なる。今、

$$A_\mu^1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{B}_\mu + B_\mu}{\sqrt{2}}, \quad A_\mu^2 \stackrel{\text{def}}{=} i\frac{\tilde{B}_\mu - B_\mu}{\sqrt{2}}, \quad A_\mu^3 \stackrel{\text{def}}{=} A_\mu \quad (5.21)$$

⁹⁾\$\chi_\mu\$ はアイソスピン 2 重項に作用する行列であり、\$\gamma^\mu\$ は \$\psi_n, \psi_p\$ に作用する行列なので、\$\chi_\mu\$ は \$\gamma^\mu\$ と可換である。

と置くと、

$$\chi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2) + A_\mu^3 \quad (5.22)$$

と書ける。ここで、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

である。また、 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 - \sigma_3)/2$ なので、 $D_\mu \psi$ は、

$$D_\mu \psi = \left[\partial_\mu - ie \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 A_\mu^1 + \sigma_2 A_\mu^2) + A_\mu^3 \right\} \frac{1 - \sigma_3}{2} \right] \psi \quad (5.24)$$

と書ける。これは、通常の共変微分

$$\left[\partial_\mu - \frac{ie}{2} \sum_{k=1}^3 A_\mu^k \sigma_k \right] \psi \quad (5.25)$$

と異なる。

$\gamma_{ab}, g_{\mu\nu}$ に対する (A.20) の G を、それぞれ 5G と G とする。 $g_{\mu\nu}$ は x^4 に依らないとして、クラインは、

$${}^5G = G - \frac{\beta^2}{4} \chi_{\mu\nu} \chi^{\mu\nu} \quad (5.26)$$

を得た¹⁰⁾。ここで、

$$\chi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_\mu \chi_\nu - \nabla_\nu \chi_\mu, \quad (5.27)$$

$$\nabla_\mu \chi_\nu \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_\mu - \beta \chi_\mu \partial_4) \chi_\nu \quad (5.28)$$

である。これより、

$$\chi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{\mu\nu} & \tilde{B}_{\mu\nu} \\ B_{\mu\nu} & A_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie(B_\mu \tilde{B}_\nu - \tilde{B}_\mu B_\nu), \quad (5.30)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ie(A_\mu B_\nu - B_\mu A_\nu), \quad (5.31)$$

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{B}_\nu - \partial_\nu \tilde{B}_\mu - ie(A_\mu \tilde{B}_\nu - \tilde{B}_\mu A_\nu) \quad (5.32)$$

を得る。

これらは、共変微分 (5.25) に対応する SU(2) ゲージ場の強さ

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e \sum_{b,c=1}^3 \varepsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (a = 1, 2, 3) \quad (5.33)$$

¹⁰⁾ この式の導出は、通常のカルツァ・クライン理論の計算 (4.17) よりだいぶ面倒であり、私は導出できていない。導出の概要を付録 B に示した。導出の過程で、 χ_μ は行列でなく、数のように扱う必要があると思われる。

と対応する。ここで、 $\varepsilon^a{}_{bc} = \varepsilon_{abc}$ はレビチビタの記号である。 $\chi_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}^a$ を用いて、

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 F_{\mu\nu}^1 + \sigma_2 F_{\mu\nu}^2) + F_{\mu\nu}^3 \quad (5.34)$$

と書ける。これは、通常の表式

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \propto \sum_{a=1}^3 \sigma_a F_{\mu\nu}^a \quad (5.35)$$

とは異なる。 \propto は定数倍を除いて等しいという意味である。

クラインは、(5.26) を、

$${}^5G = G - \frac{\beta^2}{4} \text{Tr}(\chi_{\mu\nu} \chi^{\mu\nu}) \quad (5.36)$$

と解釈した。また、全系の作用として、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{tot}}, \quad (5.37)$$

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = \mathcal{L}' + \frac{1}{2\kappa} {}^5G - \frac{\mu^2 c^2}{2\hbar^2} g^{\mu\nu} B_\mu \tilde{B}_\nu \quad (5.38)$$

を採用した。ただし、 $\beta^2 = 2\kappa$ とした。 μ は中間子の質量であり、 κ はアインシュタイン定数である。 g は $g_{\mu\nu}$ の行列式である。

5.2 パウリ (SO(3), 1953 年)

パウリから A. Pais への手紙 [1] を解説する。

4次元時空を M とし、 S^2 を2次元球面とする。パウリは、 $\tilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} M \times S^2$ という6次元空間を考えた。カルツァ・クライン理論は、 $M \times S^1$ の理論なので、その自然な拡張である。

M の座標を x^μ 、 S^2 の座標を y^a ($a = 1, 2, 3$ で $(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = r^2$, r は定数) とし、 $z^A = (x^\mu, y^a)$ とする。この節では、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を表し、ラテン小文字の添え字は 1, 2, 3 を表すものとする。 \tilde{M} の計量を $g_{AB}(z)$ とすると、その変換則は、

$$g'_{AB}(z') = \frac{\partial z^I}{\partial z'^A} \frac{\partial z^J}{\partial z'^B} g_{IJ} \quad (5.39)$$

である。特に、座標変換

$$(x^\mu, y^a) \rightarrow (x^\mu, y'^a), \quad y^a = R^a{}_b(x) y'^b \quad (5.40)$$

を考える。 $R^a{}_b(x)$ は SO(3) の元である。この時、

$$g'_{ab} = R^c{}_a R^d{}_b g_{cd} = R^c{}_a R^d{}_b \delta_{cd} = \delta_{ab}, \quad (5.41)$$

$$g'_{a\mu} = R^b{}_a \left(g_{b\mu} + \frac{\partial R^c{}_d}{\partial x^\mu} y'^d g_{bc} \right) \quad (5.42)$$

である。 $g_{bc} = \delta_{bc}$ である。今、

$$g_{a\mu} = A_{ab\mu}(x)y^b \quad (5.43)$$

を仮定する。 $A_{ab\mu}(x)$ は y^c に依らない。このとき、

$$g'_{a\mu} = A'_{ab\mu}y'^b \quad (5.44)$$

である。一方、(5.42) より、

$$g'_{a\mu} = R^c_a \left(A_{cd\mu}R^d_b + \frac{\partial R^d_b}{\partial x^\mu} \delta_{cd} \right) y'^b \quad (5.45)$$

なので、

$$A'_{ab\mu} = R^c_a A_{cd\mu}R^d_b + R^c_a \delta_{cd} \frac{\partial R^d_b}{\partial x^\mu} \quad (5.46)$$

を得る。これは、

$$\begin{aligned} A'^a_{b\mu} &= R^a_c A^c_{d\mu}R^d_b + R^a_c \frac{\partial R^c_b}{\partial x^\mu} \\ &= (R^{-1})^a_c A^c_{d\mu}R^d_b + (R^{-1})^a_c \frac{\partial R^c_b}{\partial x^\mu} \end{aligned} \quad (5.47)$$

とも書ける。添え字の上げ下げは δ_{ab} , δ^{ab} で行った。(5.40), (5.42) を書き直すと、

$$y'^a = S^a_b(x)y^b, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{S} \mathbf{A}_\mu \mathbf{S}^{-1} - \partial_\mu \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{-1} \quad (5.49)$$

となる。ただし、 $\mathbf{S} = (S^a_b)$ のような行列を用いた。 $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1}$ である。(5.49) は $\text{SO}(3)$ のゲージ場の変換則である。つまり、 $A^a_{b\mu}$ は $\text{SO}(3)$ のゲージ場である¹¹⁾。

パウリは、

$$F^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu A^a_{b\nu} - \partial_\nu A^a_{b\mu} + A^a_{c\mu} A^c_{b\nu} - A^a_{c\nu} A^c_{b\mu} \quad (5.50)$$

を場の強さとした。実際、これは $\text{SO}(3)$ のゲージ場の強さである。

5.3 ショウ (SU(2), 1955 年)

ショウは、J. Schwinger の論文 (Phys. Rev. **91**, 713 (1953)) の論文を 1953 年に読んだ。この論文は、電磁場を $\text{SO}(2)$ のゲージ理論として定式化していた。ショウはこれにヒントを得て、アイソスピン 2 重項 (5.7) に対する $\text{SU}(2)$ のゲージ理論を得た。

ψ をアイソスピン 2 重項 (5.7) とする。自由場のラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \quad (5.51)$$

¹¹⁾ $g_{a\mu}$ を $A_{ab\mu}(x)y^b$ と展開した時の係数が $\text{SO}(3)$ ゲージ場となる。カクツァ・クライン理論では、 $g_{4\mu}$ が電磁場 ($\text{U}(1)$ ゲージ場) なのであった。

である。これは、大域的な微小変換

$$\psi' = \psi + \frac{i}{2}c^i\sigma_i\psi \quad (5.52)$$

で不変である。 $i = 1, 2, 3$ であり、 c^i は微小な数、 σ_i はアイソスピン行列 (5.23) である。これに対する Noether current は、

$$s_i^\mu = -\frac{i}{2}q\bar{\psi}\gamma^\mu\sigma_i\psi \quad (5.53)$$

である。 q は isotopic charge である。

(5.52) で c^i が時空点 x の関数の場合は、 \mathcal{L}_0 は不変でなく、

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 - \frac{i}{2}\partial_\mu c^i \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\sigma_i\psi \quad (5.54)$$

と変換する。そこで、新たに場 B_μ^i を導入し、相互作用項

$$\mathcal{L}_1 = -B_\mu^i s_i^\mu \quad (5.55)$$

を加える。 $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ が局所変換 (5.52) で不変である事を要請すると、

$$q\mathbf{B}'_\mu = q(\mathbf{B}_\mu - \mathbf{c} \times \mathbf{B}_\mu) + \partial_\mu \mathbf{c} \quad (5.56)$$

となる。ここで、 $\mathbf{B}_\mu = (B_\mu^1, B_\mu^2, B_\mu^3)$ であり、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = \varepsilon^i_{jk} a^j b^k$ である。 $\varepsilon^i_{jk} = \varepsilon_{ijk}$ はレビチビタ記号である。 \mathbf{B}_μ は SU(2) ゲージ場である。

\mathbf{B}_μ のラグランジアン密度を考える。まず、電磁場との類推で、

$$\mathbf{f}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{B}_\mu \quad (5.57)$$

と置く。これは、ゲージ変換 (5.52) で、

$$\mathbf{f}'_{\mu\nu} = \mathbf{f}_{\mu\nu} - \mathbf{c} \times \mathbf{f}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \mathbf{c} \times \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{c} \times \mathbf{B}_\mu) \quad (5.58)$$

と変換する。最後の項のため、これは (アイソスピンの)3次元空間でのベクトルの変換則を満たしていない。そこで、

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_{\mu\nu} + \frac{q}{2}(\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu - \mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu) \quad (5.59)$$

と置くと¹²⁾、これはベクトルの変換則

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu} = \mathbf{F}_{\mu\nu} - \mathbf{c} \times \mathbf{F}_{\mu\nu} \quad (5.60)$$

¹²⁾[1]によると、シヨウは、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_{\mu\nu} &= \mathbf{f}_{\mu\nu} - \mathbf{c} \times \mathbf{f}_{\mu\nu} - 2(\partial_\mu \mathbf{c} \times \mathbf{B}_\nu - \partial_\nu \mathbf{c} \times \mathbf{B}_\mu), \\ \mathbf{F}_{\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_{\mu\nu} - q(\mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu - \mathbf{B}_\nu \times \mathbf{B}_\mu) \end{aligned}$$

としていたが、これは誤りである。

を満たす。よって、

$$\mathcal{L}_2 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sum_{i=1}^3 F_{\alpha\beta}^i \cdot F_{\mu\nu}^i \quad (5.61)$$

はゲージ不変である。シヨウは、全系をラグランジアン密度を、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \\ &= -\bar{\psi} \left(\gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} q B_\mu^i \sigma_i \right) + m \right) \psi - \frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.62)$$

とした。

シヨウは上の理論を 1954 年 1 月までには得ていたようである。

5.4 ヤン・ミルズ (SU(2), 1954 年)

ヤンとミルズもアイソスピン 2 重項 (5.7) に対する SU(2) のゲージ理論を考えた。

ψ をアイソスピン 2 重項 (5.7) とする。変換

$$\psi = S\psi' \quad (5.63)$$

を考える。 S は 2×2 のユニタリ行列である。共変微分

$$(\partial_\mu - i\varepsilon B_\mu)\psi \quad (5.64)$$

を導入する。 B_μ は 2×2 の行列である。 ε は isotopic charge である。 B_μ の変換則として、

$$S(\partial_\mu - i\varepsilon B'_\mu)\psi' = (\partial_\mu - i\varepsilon B_\mu)\psi \quad (5.65)$$

を要請すると、

$$B'_\mu = S^{-1} B_\mu S + \frac{i}{\varepsilon} S^{-1} \partial_\mu S \quad (5.66)$$

を得る。 $T = S^{-1}$ とすると、

$$B'_\mu = T B_\mu T^{-1} - \frac{i}{\varepsilon} \partial_\mu T \cdot T^{-1} \quad (5.67)$$

である。 B_μ 場の強さ

$$F_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu - i\varepsilon (B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu) \quad (5.68)$$

を導入すると、これは、

$$F'_{\mu\nu} = T F_{\mu\nu} T^{-1} \quad (5.69)$$

と変換する。

さて、(5.67) で $\partial_\mu T \cdot T^{-1}$ はリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の基底 ((5.23) の σ_i) の線形結合である。従って、 B_μ は、 σ_i の線形結合の項 $b_\mu^i \sigma_i$ を含んでいる必要がある。 B_μ が $B_\mu = b_\mu^i \sigma_i + \bar{B}_\mu$ と書けたとす

ると、 \bar{B}_μ は、 $\bar{B}'_\mu = T\bar{B}_\mu T^{-1}$ と変換する。 B_μ は、共変微分が変換則 (5.65) を満たすように導入されたが、その目的には \bar{B}_μ は不要である。よって、この項を落とし、

$$B_\mu = b_\mu^i \sigma_i \quad (5.70)$$

とする。この時、 $F_{\mu\nu}$ は、

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}^i \sigma_i, \quad (5.71)$$

$$\mathbf{f}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \mathbf{b}_\nu - \partial_\nu \mathbf{b}_\mu + 2\varepsilon \mathbf{b}_\mu \times \mathbf{b}_\nu \quad (5.72)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{b}_\mu = (b_\mu^1, b_\mu^2, b_\mu^3)$ であり、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = \varepsilon^i_{jk} a^j b^k$ である。 \mathbf{b}_μ は SU(2) ゲージ場であり、 $\mathbf{f}_{\mu\nu}$ はその強さである。

微小変換

$$S = 1 - i\sigma_a \omega^a \quad (5.73)$$

を考える。 ω^a は微小な数である。この時、 \mathbf{b}_μ は、

$$\mathbf{b}'_\mu = \mathbf{b}_\mu + 2\mathbf{b}_\mu \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_\mu \boldsymbol{\omega} \quad (5.74)$$

と変換する。 $\mathbf{f}_{\mu\nu}$ は、ベクトルの変換則を満たし、

$$-\frac{1}{4} \mathbf{f}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{f}_{\mu\nu} \quad (5.75)$$

はゲージ不変である。ヤン・ミルズは、核子とゲージ場の全系のラグランジアン密度として、以下を採用した：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{f}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{f}_{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - i\varepsilon b_\mu^i \sigma_i) \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (5.76)$$

5.5 いくつかのコメント

ヤン・ミルズの \mathbf{b}_μ , $\mathbf{f}_{\mu\nu}$, 2ε は、それぞれシヨウの \mathbf{B}_μ , $\mathbf{F}_{\mu\nu}$, q と対応する。SU(2) に関する限り、両者は全く同じである。シヨウの理論が SU(2) に特化していたのに対して、ヤン・ミルズのものは、直ちに一般の線形リー群へ拡張できるものであった。

ヤンは、ゲージ場の曲率の表式を見付けるのに苦労したようである。最初に電磁場との類似で $\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ を調べたが、これは望みの変換則に従わなかった。現在の多くの教科書では、(6.54) のように、共変微分の交換関係からゲージ場の曲率を定義するが、クライン、パウリ、シヨウ、ヤン・ミルズ、内山の誰も、この方法でゲージ場の曲率を導入していない。電磁場の強さを共変微分の交換関係で特徴付ける事が一般的ではなかったためである。なお、内山の論文 [5] では、ゲージ場の曲率は、§ 6.4 のように、不変変分論を用いて求められた。この方法では、ゲージ場の微分がゲージ場の曲率という形でのみラグランジアン密度に現れる事まで分かり、優れている。

5.6 参考文献

この章は主に [1] を参考にした。§ 5.1 のクラインの理論のラグランジアン密度の計算は [16] を参照のこと。

6 内山龍雄の一般ゲージ場論

この章では内山龍雄(りょうゆう)の一般ゲージ場論を解説する。文献[3, 5, 8]を参考にした。

6.1 内山龍雄の動機と視点

内山の研究は非常に一般的なものであり、重力場をも含んでいた。内山の晩年の著書『一般ゲージ場論序説』[3]の「まえがき」によると、内山の動機は以下のようなものである。内山は湯川の中間子論に疑念を抱いていた。電磁場や重力場とは異なり、中間子論は現象論の一種ではないかという疑いである。湯川理論には、電磁場や重力場の理論と異なり、必然性が欠けるように思われた。もしも中間子が、素粒子の複合粒子ならば、核力の伝達者は中間子自身でなく、中間子の素粒子と核子の間に、核力の真の伝達者として、電磁場によく似た未知の場が介在するはずだと内山は考えた。この未知の場の可能性を示すため、内山はまず電磁場と重力場とに共通する性格を抽出しようと考えた。その研究のために、統一場理論、特にワイルのゲージ理論に注目した。

内山は不変変分論(付録C)¹³⁾を用いて、電磁場と重力場との共通点(接続の理論)を抽出し、一般の線形リー群のゲージ理論を確立した。更に、ローレンツ群の場合のゲージ場が重力場である事を突き止めた。内山のたどった道は、[3]に詳しく説明されており、大変教育的である。

[6]の最終章「痛恨記」または[7]の「痛恨の記」によると、内山の研究は1954年1月にはほぼ完成し(論文は3月には完成)、5月か6月の京都大学基礎物理学研究所での研究会で初めて口頭発表された。「痛恨記」には、その後、発表が遅れた経緯が詳しく書かれている。

6.2 ゲージ場の導入

以下では、 D 次元時空を考える。ラグランジアン密度 \mathcal{L} に $\sqrt{-g}$ をかけたものを \mathcal{L} と書く。この章の以下を読むのに必要な不変変分論について、付録Cにまとめた。

n 個の実数パラメーター $\varepsilon^r (r = 1, 2, \dots, n)$ に依存する大域的変換

$$\psi'^A(x) = [\mathbf{T}(\varepsilon)]^A_B \psi^B(x) \quad (6.1)$$

で作用が不変とする(座標 x^μ は不変)。ただし、 $\mathbf{T}(\varepsilon)$ は線形リー群 G の表現になっているとする。 $\varepsilon = 0$ が恒等変換になるものとする。この時、局所変換

$$\psi'^A(x) = [\mathbf{T}(\varepsilon(x))]^A_B \psi^B(x) \quad (6.2)$$

で作用が不変となるように、 ψ のラグランジアン密度 \mathcal{L}_0 を修正することを考える。

(6.2)の無限小変換は、

$$\delta\psi^A = \psi'^A(x) - \psi^A(x) = \varepsilon^r(x) [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \quad (6.3)$$

である。ただし、 \mathbf{G}_r は群 G のリー代数の基底であり、

$$[\mathbf{G}_r, \mathbf{G}_s] = f^a_{rs} \mathbf{G}_a \quad (6.4)$$

¹³⁾ワイル『空間・時間・物質』[10]では、不変変分論が高度に応用されていた

を満たす。ここで、 $[A, B] = AB - BA$ であり、 f_{rs}^a はリ一群の構造定数である。 $f_{rs}^a = -f_{sr}^a$ である。

(6.3) で ε が定数の場合、 $\delta\mathcal{L}_0 \equiv 0$ を仮定しているので、(C.22) より、

$$[\mathcal{L}_0]_A [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B \right) \equiv 0 \quad (6.5)$$

が従う。これを書き換えると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^A} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \partial_\mu \psi^B \equiv 0 \quad (6.6)$$

となる。ところで、局所の変換では、

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_0 &\equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^A} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \partial_\mu \psi^B \right] \varepsilon^r(x) + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B \partial_\mu \varepsilon^r(x) \\ &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B \partial_\mu \varepsilon^r(x) \end{aligned} \quad (6.7)$$

である。そこで、新しい場 B_μ^r を導入し、 $\partial_\mu \varepsilon^r$ に比例することを消す必要がある。 δB_μ^r として、

$$\delta B_\mu^r = \varepsilon^s M_{s,\mu}^r + C \{^r_\mu |^\nu_s\} \partial_\nu \varepsilon^s \quad (6.8)$$

を仮定する。ただし、 $C \{^r_\mu |^\nu_s\}$ は nD 次の行列 C の成分である。 δB_μ^r の線形結合で $\partial_\mu \varepsilon^r$ を消したいので、行列 C は B_μ^r には依存しない (x には依存してよい)。また、 C^{-1} も存在する必要がある。そこで、

$$A_\mu^r \stackrel{\text{def}}{=} -(C^{-1}) \{^r_\mu |^\nu_s\} B_\nu^s \quad (6.9)$$

が存在する¹⁴⁾。このとき、

$$\delta A_\mu^r = \varepsilon^s N_{s,\mu}^r - \partial_\mu \varepsilon^r \quad (6.10)$$

となる。 A_μ^r をゲージ場という。

求める \mathcal{L} は $\psi^A, \partial_\mu \psi^A, A_\mu^r$ の関数である。 A の微分は不要である。 $\delta\mathcal{L} \equiv 0$ は、

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \partial_\mu \psi^B \right] \varepsilon^r(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B \partial_\mu \varepsilon^r(x) \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^r} (\varepsilon^s N_{s,\mu}^r - \partial_\mu \varepsilon^r) \end{aligned} \quad (6.11)$$

となる。 ε^r の係数から、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \partial_\mu \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^s} N_{r,\mu}^s \equiv 0 \quad (6.12)$$

を得る。 $\partial_\nu \varepsilon^r$ の係数から、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]_B^A \psi^B - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^r} \equiv 0 \quad (6.13)$$

¹⁴⁾ $(C^{-1}) \{^r_\mu |^\sigma_t\} C \{^t_\sigma |^\nu_s\} = \delta_\mu^\nu \delta_s^r$ である。

を得る。この式は、 $\partial_\mu \psi^A$ と A^r_μ とが、

$$\nabla_\mu \psi^A \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \psi^A + A^r_\mu [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \quad (6.14)$$

という組み合わせ (これを ψ^A の共変微分と呼ぶ) でのみ、 \mathcal{L} に含まれる事を意味する。そこで、

$$\mathcal{L} =: \mathcal{L}'(\psi, \nabla_\mu \psi, A) \quad (6.15)$$

と置く。この時、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^A} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^B} A^r_\mu [\mathbf{G}_r]^B_A, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A}, \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^r_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A^r_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \quad (6.18)$$

となる。これらの使うと (6.13) は、

$$-\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A^r_\mu} \equiv 0 \quad (6.19)$$

となる。つまり、 \mathcal{L}' に A はあらわには現れない：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'(\psi, \nabla_\mu \psi, A) = \mathcal{L}'(\psi, \nabla_\mu \psi). \quad (6.20)$$

(6.12) は、

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^A} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A} [\mathbf{G}_r]^A_B \partial_\mu \psi^B \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A} \left([\mathbf{G}_s]^A_B \psi^B N^s_{r,\mu} + A^s_\mu [\mathbf{G}_s]^A_B [\mathbf{G}_r]^B_C \psi^C \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^A} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A} [\mathbf{G}_r]^A_B \nabla_\mu \psi^B \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A} \left([\mathbf{G}_s]^A_B \psi^B N^s_{r,\mu} + A^s_\mu [\mathbf{G}_s]^A_B [\mathbf{G}_r]^B_C \psi^C - [\mathbf{G}_r]^A_B A^s_\mu [\mathbf{G}_s]^B_C \psi^C \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^A} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A} [\mathbf{G}_r]^A_B \nabla_\mu \psi^B \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \nabla_\mu \psi^A} \left([\mathbf{G}_s]^A_B \psi^B N^s_{r,\mu} + A^s_\mu ([\mathbf{G}_s, \mathbf{G}_r])^A_B \psi^B \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

となる。

ところで、 $(D_\mu \psi)^A$ の変換則は、微小局所変換のもとで以下のようになる：

$$\begin{aligned} (\nabla'_\mu \psi')^A &= \partial_\mu \psi'^A + A'^r_\mu (\mathbf{G}_r \psi')^A \\ &= \partial_\mu [\psi^A + \varepsilon^r (\mathbf{G}_r \psi)^A] + (A^r_\mu + \varepsilon^s N^r_{s,\mu} - \partial_\mu \varepsilon^r) [(\mathbf{G}_r \psi)^A + \varepsilon^s (\mathbf{G}_r \mathbf{G}_s \psi)^A] \\ &= (\nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^r (\mathbf{G}_r \partial_\mu \psi)^A + \varepsilon^s [N^r_{s,\mu} (\mathbf{G}_r \psi)^A + A^r_\mu (\mathbf{G}_r \mathbf{G}_s \psi)^A] \\ &= (\nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^r (\mathbf{G}_r \nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^s [N^r_{s,\mu} (\mathbf{G}_r \psi)^A + A^r_\mu ([\mathbf{G}_r, \mathbf{G}_s] \psi)^A] \\ &= (\nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^r (\mathbf{G}_r \nabla_\mu \psi)^A + \varepsilon^s [N^r_{s,\mu} (\mathbf{G}_r \psi)^A + A^r_\mu f^t_{rs} (\mathbf{G}_t \psi)^A]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

つまり、

$$\delta(\nabla_\mu\psi)^A = \varepsilon^r(\mathbf{G}_r\nabla_\mu\psi)^A + \varepsilon^s[N^t_{s,\mu} + A^r_\mu f^t_{rs}](\mathbf{G}_t\psi)^A \quad (6.23)$$

である¹⁵⁾。さて、もし、

$$N^t_{r,\mu} = -A^s_\mu f^t_{sr} = A^s_\mu f^t_{rs} \quad (6.24)$$

ならば、

$$\delta(\nabla_\mu\psi)^A = \varepsilon^r(\mathbf{G}_r\nabla_\mu\psi)^A \quad (6.25)$$

となり、 $(\nabla_\mu\psi)^A$ の変換則は ψ^A と同じ形になる。以下では、 $N^t_{r,\mu}$ をこのように選ぶ。 A^r_μ の変換則は、

$$\delta A^r_\mu = \varepsilon^s f^r_{st} A^t_\mu - \partial_\mu \varepsilon^r \quad (6.26)$$

となる。

(6.26)より、 A^r_μ が実数なら、 δA^r_μ も実数である。よって、 A^r_μ を実数と仮定する。

また、以下では、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi^A, (\nabla_\mu\psi)^A, \theta^a_\mu) \quad (6.27)$$

と選ぶ。このとき、(6.21)は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \psi^A} (\mathbf{G}_r)^A_B \psi^B + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\nabla_\mu\psi)^A} (\mathbf{G}_r)^A_B (\nabla_\mu\psi)^B \equiv 0 \quad (6.28)$$

となる。これは(6.6)で微分を共変微分に置き換えたものである。

6.3 ゲージ場の変換則

$\nabla_\mu\psi^A$ は ψ^A と同じ変換則

$$\delta\nabla_\mu\psi^A = \varepsilon^r[\mathbf{G}_r]^A_B \nabla_\mu\psi^B \quad (6.29)$$

を満たす。一般の変換

$$\psi'^A = [\mathbf{T}(\varepsilon(x))]^A_B \psi^B \quad (6.30)$$

は無微小変換の積み重ねで実現できる。よって、一般の変換に対して、

$$(\nabla_\mu\psi)^A = \nabla'_\mu\psi'^A = [\mathbf{T}]^A_B (\nabla_\mu\psi)^B \quad (6.31)$$

¹⁵⁾よって、(6.21)は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^A} \delta\psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\nabla_\mu\psi)^A} \delta(\nabla_\mu\psi)^A \equiv 0$$

となる。

である。今、

$$\mathbf{A}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} A^r_\mu \mathbf{G}_r \quad (6.32)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \nabla'_\mu \psi'^A &= \partial_\mu (\mathbf{T}\psi)^B + (\mathbf{A}'_\mu \mathbf{T}\psi)^A \\ &= (\partial_\mu \mathbf{T}\psi)^A + (\mathbf{T}\partial_\mu \psi)^A + (\mathbf{A}'_\mu \mathbf{T}\psi)^A \end{aligned} \quad (6.33)$$

および、

$$[\mathbf{T}]^A_B (\nabla_\mu \psi)^B = (\mathbf{T}\partial_\mu \psi)^A + (\mathbf{T}\mathbf{A}_\mu \psi)^A \quad (6.34)$$

なので、

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \mathbf{T}\psi)^A + (\mathbf{A}'_\mu \mathbf{T}\psi)^A &= (\mathbf{T}\mathbf{A}_\mu \psi)^A, \\ \mathbf{A}'_\mu \mathbf{T} &= \mathbf{T}\mathbf{A}_\mu - \partial_\mu \mathbf{T}, \\ \mathbf{A}'_\mu &= \mathbf{T}\mathbf{A}_\mu \mathbf{T}^{-1} - \partial_\mu \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \quad (6.35)$$

を得る。つまり、

$$A'^r_\mu \mathbf{G}_r = A^r_\mu \mathbf{T}\mathbf{G}_r \mathbf{T}^{-1} - \partial_\mu \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} \quad (6.36)$$

である。これが一般のゲージ変換である。

ところで、

$$\mathbf{T}\mathbf{G}_r \mathbf{T}^{-1} = \alpha^s_r \mathbf{G}_s \quad (6.37)$$

を満たす n 次行列 α が存在する。それを $\text{Ad}(\mathbf{T})$ と書く：

$$\mathbf{T}\mathbf{G}_r \mathbf{T}^{-1} = [\text{Ad}(\mathbf{T})]^s_r \mathbf{G}_s. \quad (6.38)$$

\mathbf{T} が、

$$\mathbf{T} = \exp(\varepsilon^r \mathbf{G}_r) \quad (6.39)$$

と書ける時¹⁶⁾、

$$\text{Ad}(\mathbf{T}) = \exp(\varepsilon^r \text{ad}(\mathbf{G}_r)) \quad (6.40)$$

である。ここで、

$$[\text{ad}(\mathbf{G}_r)]^t_s = f^t_{rs} \quad (6.41)$$

である。よって、

$$\mathbf{T}\mathbf{G}_r \mathbf{T}^{-1} = [\exp(\mathbf{e})]^s_r \mathbf{G}_s, \quad \mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^r \text{ad}(\mathbf{G}_r) \quad (6.42)$$

である。

¹⁶⁾ $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ の任意の元はこの形で書ける。

6.4 ラグランジアン密度の形：Noether の第 2 定理の応用

ゲージ場 A^r_μ の運動方程式を考える。 A^r_μ にだけ依存するラグランジアン密度を $\mathcal{L}_1(A^r_\mu, \partial_\nu A^r_\mu)$ とし、これがゲージ変換で不変と仮定する。特に、無限小変換

$$\delta A^r_\mu = \varepsilon^s f^r_{st} A^t_\mu - \partial_\mu \varepsilon^r \quad (6.43)$$

の下で、 $\delta \mathcal{L}_1 = 0$ である：

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A^r_\mu} \delta A^r_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\nu A^r_\mu} \partial_\nu (\delta A^r_\mu) \equiv 0. \quad (6.44)$$

ここで、 $\delta(\partial_\nu A^r_\mu) = \partial_\nu (\delta A^r_\mu)$ を用いた。 ε^s に比例する項より、

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A^r_\mu} f^r_{st} A^t_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\nu A^r_\mu} f^r_{st} \partial_\nu A^t_\mu \equiv 0 \quad (6.45)$$

を得る。 $\partial_\nu \varepsilon^r$ に比例する項より、

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A^r_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\nu A^s_\mu} f^s_{rt} A^t_\mu \equiv 0 \quad (6.46)$$

を得る。 $\partial_\nu \partial_\mu \varepsilon^r$ に比例する項より、

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\nu A^r_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\mu A^r_\nu} \equiv 0 \quad (6.47)$$

を得る。この式より、 A^r_μ の微分は、 $\partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\mu$ という組み合わせでのみ \mathcal{L}_1 の中に含まれる事が分かる。この事と (6.46) より、 A^r_μ の微分は、

$$F^r_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\mu + f^r_{st} A^s_\mu A^t_\nu \quad (6.48)$$

という組み合わせでのみ \mathcal{L}_1 の中に含まれる事が分かる。 $F^r_{\mu\nu}$ はゲージ場の曲率、またはゲージの強さと呼ばれる。

6.5 ゲージ場の曲率

6.5.1 共変微分と曲率との関係

$F^r_{\mu\nu}$ は次のように考えると自然に現れる。

ψ^A は変換則

$$\psi'^A = \psi^A + \varepsilon^r [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \quad (6.49)$$

に従い、その共変微分は、

$$(\nabla_\mu \psi)^A = \partial_\mu \psi^A + A^r_\mu [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \quad (6.50)$$

であった。これより、一般に、場の組 $\{\phi^a\}$ が、

$$\phi'^a = \phi^a + \varepsilon^r (G_r)^a_b \phi^b \quad (6.51)$$

と変換するとき、

$$(\nabla_\mu \phi)^a \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \phi^a + A^r_\mu (G_r)^a_b \phi^b \quad (6.52)$$

と定める。これより、

$$\begin{aligned} (\nabla_\nu \nabla_\mu \psi)^A &= \partial_\nu (\nabla_\mu \psi)^A + A^s_\nu [\mathbf{G}_s]^A_B (\nabla_\mu \psi)^B \\ &= \partial_\nu \partial_\mu \psi^A + \partial_\nu A^r_\mu (\mathbf{G}_r \psi)^A + A^r_\mu (\mathbf{G}_r \partial_\nu \psi)^A + A^s_\nu (\mathbf{G}_s \partial_\mu \psi)^A + A^s_\nu A^r_\mu (\mathbf{G}_s \mathbf{G}_r \psi)^A \end{aligned} \quad (6.53)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} ([\nabla_\mu, \nabla_\nu] \psi)^A &= (\partial_\mu A^r_\nu - \partial_\nu A^r_\mu) (\mathbf{G}_r \psi)^A + A^s_\mu A^t_\nu ([\mathbf{G}_s, \mathbf{G}_t] \psi)^A \\ &= F^r_{\mu\nu} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \end{aligned} \quad (6.54)$$

となる。 $F^r_{\mu\nu}$ が自然に現れた。

6.5.2 曲率の変換則

今、

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} F^r_{\mu\nu} \mathbf{G}_r \quad (6.55)$$

とする。これは、

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] \quad (6.56)$$

とも書ける。その変換則は、(6.35)

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{T} \mathbf{A}_\mu \mathbf{T}^{-1} - \partial_\mu \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1}$$

より、

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu} = \mathbf{T} \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{T}^{-1} \quad (6.57)$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} F'^r_{\mu\nu} &= [\text{Ad}(\mathbf{T})]^r_s F^s_{\mu\nu} \\ &= [\exp \mathbf{e}]^r_s F^s_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.58)$$

を得る。

今、

$$\mathbf{f}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \text{ad}(\mathbf{G}_r) F^r_{\mu\nu} \quad (6.59)$$

とすると、

$$\mathbf{f}'_{\mu\nu} = \exp(\mathbf{e}) \mathbf{f}_{\mu\nu} \exp(-\mathbf{e}) \quad (6.60)$$

となる。よって、

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = \frac{1}{4k} \text{Tr}[\mathbf{f}_{\mu\nu} \mathbf{f}^{\mu\nu}] \quad (6.61)$$

はゲージ不変である。\$k\$ は正の定数である。今、

$$\kappa_{rs} \stackrel{\text{def}}{=} -\text{Tr}[\text{ad}(\mathbf{G}_r) \text{ad}(\mathbf{G}_s)] = -f_{rv}^u f_{su}^v (= -\kappa_{sr}) \quad (6.62)$$

とすると、

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4k} \kappa_{rs} F_{\mu\nu}^r F^{s,\mu\nu} \quad (6.63)$$

となる。

一般に

$$\text{Tr}[\mathbf{f}_{\mu\nu} \mathbf{f}_{\alpha\beta}] \quad (6.64)$$

はゲージ不変である。今、

$$F_{r,\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{rs} F_{\mu\nu}^s \quad (6.65)$$

とすると、(6.64) のゲージ不変性より、

$$F'_{r,\mu\nu} = F_{s,\mu\nu} [\exp(-\mathbf{e})]_r^s \quad (6.66)$$

を得る。

変換のリ一群が半単純のとき、\$\det \kappa_{rs} \neq 0\$ であり、\$\kappa_{rs}\$ は逆を持つ。更に、コンパクト半単純の場合は、パラメーターを適当に変換して \$\kappa_{rs} = \delta_{rs}\$ と出来る。なお、ローレンツ群は非コンパクトである。

6.5.3 曲率の共変微分

(6.58) より、微小変換では、

$$F_{\mu\nu}^{\prime r} = F_{\mu\nu}^r + \varepsilon^t f_{ts}^r F_{\mu\nu}^s \quad (6.67)$$

となる。よって一般処方 (6.52) より、

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu}^r = \partial_\lambda F_{\mu\nu}^r + A^t_\lambda f_{ts}^r F_{\mu\nu}^s \quad (6.68)$$

となる。これは、

$$\nabla_\lambda \mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\lambda \mathbf{F}_{\mu\nu} + [\mathbf{A}_\lambda, \mathbf{F}_{\mu\nu}] \quad (6.69)$$

とも書ける。変換則は、

$$\nabla'_\lambda \mathbf{F}'_{\mu\nu} = \mathbf{T} \nabla_\lambda \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{T}^{-1} \quad (6.70)$$

となり、 $\nabla_\lambda \mathbf{F}_{\mu\nu}$ は $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ と同じ変換則を満たす。

また、微小変換で、

$$F'_{r,\mu\nu} = F_{r,\mu\nu} - \varepsilon^t f^s_{tr} F_{s,\mu\nu} \quad (6.71)$$

となるので、

$$\nabla_\lambda F_{r,\mu\nu} = \partial_\lambda F_{r,\mu\nu} - A^t_{\lambda tr} f^s_{tr} F_{s,\mu\nu} \quad (6.72)$$

である。ここで、

$$f_{abc} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{ar} f^r_{bc} \quad (6.73)$$

が完全反対称である事を使うと、

$$\nabla_\lambda (\kappa_{rs} F^s_{\mu\nu}) = \kappa_{rs} \nabla_\lambda F^s_{\mu\nu} \quad (6.74)$$

を示す事が出来る。

6.6 ゲージ場の運動方程式

A^r_μ の微分は、 $F^r_{\mu\nu}$ の形でのみ現れる：

$$\mathcal{L}_1 =: \mathcal{L}'_1(A^r_\mu, F^r_{\mu\nu}). \quad (6.75)$$

よって、

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A^r_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial A^r_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial F^s_{\mu\nu}} \cdot 2f^s_{rt} A^t_\nu, \quad (6.76)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\nu A^r_\mu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial F^r_{\nu\mu}} \quad (6.77)$$

となる。(6.46)

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial A^r_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_\nu A^s_\mu} f^s_{rt} A^t_\mu \equiv 0$$

は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial A^r_\mu} \equiv 0 \quad (6.78)$$

となる。これより、 \mathcal{L}_1 は $F^r_{\mu\nu}$ だけの関数である。

(6.45) は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial F^s_{\mu\nu}} f^s_{rt} F^t_{\mu\nu} \equiv 0 \quad (6.79)$$

となる。ここで、ヤコビ恒等式

$$[[\mathbf{G}_r, \mathbf{G}_s], \mathbf{G}_t] + [[\mathbf{G}_s, \mathbf{G}_t], \mathbf{G}_r] + [[\mathbf{G}_t, \mathbf{G}_r], \mathbf{G}_s] = 0 \quad (6.80)$$

より得られる

$$f^p_{rs} f^q_{pt} + f^p_{st} f^q_{pr} + f^p_{tr} f^q_{ps} = 0 \quad (6.81)$$

を用いた。(6.58) より、微小変換で、 $\delta F^s_{\mu\nu} = \varepsilon^r f^s_{rt} F^t_{\mu\nu}$ なので、上式は、

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial F^s_{\mu\nu}} \delta F^s_{\mu\nu} \equiv 0 \quad (6.82)$$

と等価となる。つまり、 \mathcal{L}'_1 がゲージ不変であるという前提そのものを表している。 $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_{\text{Gauge}}$ とすると、この式が満たされる。

以下では、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi, \nabla\psi) + \mathcal{L}'_1 \quad (6.83)$$

について考える。 A^r_{μ} の運動方程式は、

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^r_{\mu}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial F^s_{\mu\nu}} \cdot 2f^s_{rt} A^t_{\nu} - \partial_{\nu} \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial F^r_{\nu\mu}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^r_{\mu}} = 0 \quad (6.84)$$

である。ここで、

$$\pi_r^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{\partial \mathcal{L}'_1}{\partial F^s_{\mu\nu}}, \quad (6.85)$$

$$\mathbf{j}_r^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^r_{\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\nabla_{\mu}\psi)^A} (\mathbf{G}_r\psi)^A \quad (6.86)$$

と置くと、

$$\partial_{\nu} \pi_r^{\mu\nu} - f^s_{tr} A^t_{\nu} \pi_s^{\mu\nu} = -\mathbf{j}_r^{\mu} \quad (6.87)$$

となる。この微分の形は (6.72) と同じなので、

$$\nabla_{\lambda} \pi_r^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\lambda} \pi_r^{\mu\nu} - f^s_{tr} A^t_{\lambda} \pi_s^{\mu\nu} \quad (6.88)$$

として、

$$\nabla_{\nu} \pi_r^{\mu\nu} = -\mathbf{j}_r^{\mu} \quad (6.89)$$

となる。運動方程式 (6.89) は、Maxwell 方程式とそっくりの形

$$\partial_{\nu} \pi_r^{\mu\nu} = -(\mathbf{j}_r^{\mu} - f^s_{tr} A^t_{\nu} \pi_r^{\mu\nu}) \quad (6.90)$$

に書ける。右辺の第2項からも分かるように、ゲージ場が「ゲージ荷」を持っているため、ゲージ場はゲージ場自身の源の役割も持つ。

6.7 ゲージ場の再定義

6.7.1 G_r の規格化

今、

$$\kappa_{rs} = M\delta_{rs}, \quad (6.91)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{G}_r \mathbf{G}_s) = -N\delta_{rs} \quad (6.92)$$

の場合を考える。ただし、 M, N は正の定数である。このとき、この時、

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{M}{4k} \delta_{rs} F^r_{\mu\nu} F^{s,\mu\nu} \quad (6.93)$$

である。 $\mathbf{G}_r = \alpha \mathbf{G}'_r$ (α は定数) とすると、

$$[\mathbf{G}'_r, \mathbf{G}'_s] = f'^a_{rs} \mathbf{G}'_a, \quad f'^a_{rs} = \frac{1}{\alpha} f^a_{rs} \quad (6.94)$$

である。また、(6.62) の κ_{rs} は、

$$\kappa'_{rs} \stackrel{\text{def}}{=} -f'^u_{rv} f'^v_{su} = \frac{1}{\alpha^2} \kappa_{rs} \quad (6.95)$$

となる。よって、

$$\kappa'_{rs} = \frac{M}{\alpha^2} \delta_{rs} \equiv M' \delta_{rs}, \quad (6.96)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{G}'_r \mathbf{G}'_s) = -\frac{N}{\alpha^2} \delta_{rs} \quad (6.97)$$

である。また、 $A^r_{\mu} \mathbf{G}_r = A^r_{\mu} \mathbf{G}'_r$ で A^r_{μ} を定義すると、 $A^r_{\mu} = \alpha A^r_{\mu}$ であり、

$$\begin{aligned} F^r_{\mu\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\mu} A^r_{\nu} - \partial_{\nu} A^r_{\mu} + f'^r_{st} A^s_{\mu} A^t_{\nu} \\ &= \alpha F^r_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.98)$$

となる。よって、

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4k} \kappa'_{rs} F^r_{\mu\nu} F^{s,\mu\nu} = -\frac{M'}{4k} \delta_{rs} F^r_{\mu\nu} F^{s,\mu\nu} \quad (6.99)$$

となる。 α を適当に選んで、 $\text{Tr}(\mathbf{G}'_r \mathbf{G}'_s) = -\delta_{rs}$ や $\text{Tr}(\mathbf{G}'_r \mathbf{G}'_s) = -\frac{1}{2} \delta_{rs}$ とすることが出来る。以下、 \mathbf{G}_r は適当に規格化されていると仮定し、' を省略する。

6.7.2 ゲージ場の再定義

多くの文献では、ゲージ場 A^r_{μ} を $g A^r_{\mu}$ と表している。ここで、

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (6.100)$$

である。今、後者の A^r_μ を \tilde{A}^r_μ と置く ($A^r_\mu = g\tilde{A}^r_\mu$) と、 ψ^A の共変微分は、

$$\nabla_\mu \psi^A = \partial_\mu \psi^A + g\tilde{A}^r_\mu [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \quad (6.101)$$

となり、ゲージ場の曲率は、

$$F^r_{\mu\nu} = g\tilde{F}^r_{\mu\nu}, \quad \tilde{F}^r_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu \tilde{A}^r_\nu - \partial_\nu \tilde{A}^r_\mu + gf^r_{st} \tilde{A}^s_\mu \tilde{A}^t_\nu \quad (6.102)$$

となる。また、 $\mathcal{L}_{\text{Gauge}}$ は、

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4} \delta_{rs} \tilde{F}^r_{\mu\nu} \tilde{F}^{s,\mu\nu} \quad (6.103)$$

となる。オイラー・ラグランジュ方程式 (6.87) は、 $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_{\text{Gauge}}$ の場合、

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}_r - gf^s_{tr} \tilde{A}^t_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}_s = \tilde{j}^\mu_r, \quad (6.104)$$

$$\tilde{j}^\mu_r \stackrel{\text{def}}{=} g\dot{j}^\mu_r = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \tilde{A}^r_\mu} \quad (6.105)$$

となる。ここで、 $g\tilde{F}^{\mu\nu}_r \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{rs} F^{r,\mu\nu}$ である¹⁷⁾。

6.8 いくつかのコメント

ショウ、ヤン・ミルズ、内山の理論は、ワイルのゲージ理論の影響を強く受けており、おそらくカルツァ・クライン理論がなくても誕生したと思われる。一方、クラインとパウリの理論は、カルツァ・クライン理論の拡張から生まれたものである。ゲージ理論の誕生に初期の統一場理論が重要であり、統一場理論は一般相対論から生まれた。さらに、内山によって、重力場もゲージ場とみなせることが明らかにされた。

もしアインシュタインがいなくて、一般相対論の完成が遅くなった場合に、物理学がどのように発展したかを考えることは興味深い。ゲージ理論が先に生まれ、それからゲージ理論の一種として重力理論が生まれたかもしれない。ファインマン [14] は、一般相対論が知られていないが、ゲージ理論は知られているとして、重力理論を作る事を試みた。ファインマンの重力理論は、一般座標変換のゲージ理論とみなせる¹⁸⁾。ファインマンは、ヤン・ミルズの論文には言及しているが、内山には言及していない。ファインマンの重力理論は、非幾何学的なものであり、大変興味深い。

6.9 参考文献

この章は、[3, 5, 8] を参考にした。ゲージ理論としての重力理論については [3, 5, 17] が詳しい。内山 [6] には、一般相対論、統一場理論、ゲージ理論の一般向けの解説があり、発表が遅れた経緯が詳しく書いてある。

¹⁷⁾ 添え字を $\kappa_{rs} = M\delta_{rs}$ でなく、 δ_{rs} で下げていることに注意せよ。また、 $F^{r,\mu\nu} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} F^{r,\mu\nu}$ である。

¹⁸⁾ 一般座標変換のゲージ理論については、内山 [3] が詳しい。本章では、場の変換 $\psi^A(x) \rightarrow (\mathbf{T})^A_B \psi^B(x)$ について考えた。一般座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ (微小変換は、 $\varepsilon^\mu(x)$ を微小量として、 $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$) とそれに伴う場の変換について、本章の議論を拡張したものが、一般座標変換のゲージ理論である。

謝辞

この原稿を読んで有益なコメントを下さった松尾 衛さんに感謝します。

A 一般相対論

A.1 接続と曲率テンソル

この章では D 次元時空を考える。計量 $g_{\mu\nu}$ は、 $(-++\cdots+)$ の符号を持つとする。計量の共変微分が 0 という式は、

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha = 0 \quad (\text{A.1})$$

である。これ式はまた、ベクトルの長さが平行移動で不変ということを表す。添え字をサイクリックに入れ替えて、

$$\nabla_\mu g_{\lambda\nu} = \partial_\mu g_{\lambda\nu} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla_\nu g_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - g_{\alpha\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \quad (\text{A.3})$$

を得る。 $-(\text{A.1})+(\text{A.2})+(\text{A.3})$ を計算すると、

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - g_{\alpha\nu} C_{\lambda\mu}^\alpha - g_{\alpha\mu} C_{\lambda\nu}^\alpha - g_{\lambda\alpha} 2\Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha = 0 \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで、

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) \quad (\text{A.5})$$

である。また、

$$C_{\nu\mu}^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (\text{A.6})$$

は振率テンソルである。(A.4) を $\Gamma_{(\nu\mu)}^\alpha$ について解いて、

$$\Gamma_{(\mu\nu)}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(C_{\nu\mu}^\sigma + C_{\mu\nu}^\sigma) \quad (\text{A.7})$$

を得る。ここで、 $g_{\mu\nu}$ とその逆 (行列) $g^{\mu\nu}$ で添え字の上げ下げを行った。 $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{(\mu\nu)}^\sigma + \frac{1}{2}C_{\mu\nu}^\sigma$ なので、

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K_{\mu\nu}^\sigma \quad (\text{A.8})$$

を得る。ここで、

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.9})$$

であり、クリストッフエルの 3 指記号と呼ばれる。また、

$$K_{\mu\nu}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(C_{\mu\nu}^\sigma + C_{\nu\mu}^\sigma + C_{\mu\nu}^\sigma) \quad (\text{A.10})$$

は contortion と呼ばれ、最初の 2 つの添え字について反対称

$$K_{\sigma\mu\nu} = -K_{\mu\sigma\nu} \quad (\text{A.11})$$

である。特に、振率なしの条件

$$C^\sigma_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.12})$$

を置くと、

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu} = \begin{cases} \sigma \\ \mu\nu \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

となる。この接続をリーマン接続やレビ=チビタ接続という。

曲率テンソルは、

$$R^\mu_{\lambda\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\lambda\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\lambda\beta} - \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\lambda\alpha} \quad (\text{A.14})$$

で定義される。リッチテンソルは、

$$R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (\text{A.15})$$

で定義され、スカラー曲率 R は、

$$R \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{A.16})$$

で定義される。

A.2 重力場の作用

計量 $g_{\mu\nu}$ は重力のポテンシャルに対応する量である。よって、重力場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\text{gravity}}$ は、計量を用いて表されるだろう。これは、計量の微分 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ の2次の式 G である事が予想される。なぜなら、ニュートン力学によると、重力ポテンシャルの従う方程式は2階の微分方程式である(また、電磁場のラグランジアン密度は、ポテンシャル A_μ の微分の2次式であった事のアナロジーによる)。ところが、 $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ は座標変換によって、任意のある1点で0に出来るので、 G もある1点で0に出来き、 G はスカラーではあり得ない。そこで、 G に計量の2階微分について線形の式を足した量 l で、スカラーなものを考えてみる。もし、

$$\sqrt{-g}l = \sqrt{-g}G + \partial_\mu \mathbf{D}^\mu, \quad g \stackrel{\text{def}}{=} \det(g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.17})$$

の形になっていれば、 $\partial_\mu \mathbf{D}^\mu$ は運動方程式に効かない¹⁹⁾ので、 l は実質的には計量の微分の2次の式 G である。ところで、 l として最も一般的なものは、定数倍を除きリーマン接続に対するスカラー曲率 R^* である [4]。上付きの $*$ はリーマン接続に対するものである事を表す。 $l = R^*$ としたとき、(A.17) が成り立つ [4]。以上より、重力場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\text{gravity}}$ は、

$$\mathcal{L}_{\text{gravity}} = \frac{1}{2c\kappa} R^* \quad (\text{A.18})$$

¹⁹⁾ただし、計量の変分の微分が境界でとなることを課してある。通常、場の解析力学では、場の変分は境界で0とするが、場の変分の微分は境界で0である事は課さなくてよい。多脚場によるアインシュタイン方程式の導出では、多脚場の変分の微分が境界で0である事を課す必要はない。その意味で、多脚場による定式化の方が自然である。

と結論される。 κ はアインシュタイン定数と呼ばれるある定数で、アインシュタイン方程式の非相対論極限から、 $\kappa = 8\pi G/c^4$ と分かる。 G は万有引力定数である。

(A.17) は、具体的には、

$$\sqrt{-g}R^* = \sqrt{-g}G + \partial_\mu \mathbf{D}^\mu, \quad (\text{A.19})$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} \left[\begin{matrix} \rho \\ \gamma\nu \end{matrix} \right] \begin{matrix} \gamma \\ \mu\rho \end{matrix} - \begin{matrix} \rho \\ \gamma\rho \end{matrix} \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right], \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{D}^\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} - \sqrt{-g}g^{\mu\rho} \begin{matrix} \nu \\ \mu\nu \end{matrix} \quad (\text{A.21})$$

となる [4]。

B カルツァ・クライン理論のラグランジアン密度

§ 5.1 のクラインの「ゲージ理論」におけるラグランジアン密度を計算する。記号は§ 5.1 と同じである。ただし、 $\beta\chi_\mu$ を A_μ と書き、行列ではなく数として扱う。 A_μ だけは、5番目の座標 x^4 に依存するのであった。この x^4 依存性がなければ、以下の計算は、通常のカルツァ・クライン理論 (第4章) に対するものとなる。

§ 5.1 の計量を少し一般化し、

$$\gamma_{44} = \alpha, \quad \gamma_{4\mu} = A_\mu, \quad \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} A_\mu A_\nu \quad (\text{B.1})$$

とする。 α は未定の定数である。逆行列は、

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{4\mu} = -\frac{1}{\alpha} A^\mu, \quad \gamma^{44} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} A_\mu A^\mu \quad (\text{B.2})$$

となる。 $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆であり、ギリシャ文字の上げ下げは $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ で行う。 ${}^5\Gamma^c_{ab}$ を γ_{ab} に対するクリストッフエル記号とし、 $\Gamma_{\mu\nu}$ を $g_{\alpha\beta}$ に対するそれとする。多少の計算の後、以下を得る：

$${}^5\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}(f_\mu^\sigma A_\nu + f_\nu^\sigma A_\mu) + \frac{1}{2\alpha^2} A^\sigma (c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu), \quad (\text{B.3})$$

$${}^5\Gamma^4_{\mu\nu} = -\frac{1}{\alpha} A_\lambda {}^5\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} S_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha^2} (c_\mu A_\nu + A_\mu c_\nu), \quad (\text{B.4})$$

$${}^5\Gamma^\sigma_{4\nu} = \frac{1}{2} f_\nu^\sigma + \frac{1}{2\alpha} (c^\sigma A_\nu + A^\sigma c_\nu), \quad (\text{B.5})$$

$${}^5\Gamma^4_{4\nu} = -\frac{1}{2\alpha} f_{\nu\lambda} A^\lambda - A^\lambda \frac{1}{2\alpha^2} (c_\lambda A_\nu + A_\lambda c_\nu), \quad (\text{B.6})$$

$${}^5\Gamma^\sigma_{44} = c^\sigma, \quad (\text{B.7})$$

$${}^5\Gamma^4_{44} = 0. \quad (\text{B.8})$$

ここで、

$$c_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_4 A_\mu, \quad f_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad S_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \quad (\text{B.9})$$

である。また、

$${}^5\Gamma_\mu \stackrel{\text{def}}{=} {}^5\Gamma^a_{\mu a} = \Gamma_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^\alpha_{\mu\alpha}, \quad (\text{B.10})$$

$${}^5\Gamma_4 \stackrel{\text{def}}{=} {}^5\Gamma^a_{4a} = \frac{1}{\alpha} c^\sigma A_\sigma \quad (\text{B.11})$$

となる。

γ_{ab} , $g_{\mu\nu}$ に対する (A.20) の G を、それぞれ 5G と G とする。 5G は、

$$\begin{aligned} {}^5G &= {}^5\Gamma^d_{cb} {}^5\Gamma^c_{ad} \gamma^{ab} - {}^5\Gamma_c {}^5\Gamma^c_{ab} \gamma^{ab} \\ &\equiv {}^5G_1 - {}^5G_2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

となる。 5G_1 は、

$${}^5G_1 = r_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + 2r_{4\beta} \gamma^{4\beta} + r_{44} \gamma^{44}, \quad (\text{B.13})$$

$$r_{\alpha\beta} = {}^5\Gamma^\delta_{\gamma\beta} {}^5\Gamma^\gamma_{\alpha\delta} + 2 \cdot {}^5\Gamma^\delta_{4(\beta} {}^5\Gamma^4_{\alpha)\delta} + {}^5\Gamma^4_{4\beta} {}^5\Gamma^4_{\alpha 4}, \quad (\text{B.14})$$

$$r_{4\beta} = {}^5\Gamma^\delta_{\gamma\beta} {}^5\Gamma^\gamma_{4\delta} + {}^5\Gamma^\delta_{4\beta} {}^5\Gamma^4_{4\delta} + {}^5\Gamma^4_{\gamma\beta} {}^5\Gamma^\gamma_{44}, \quad (\text{B.15})$$

$$r_{44} = {}^5\Gamma^\delta_{\gamma 4} {}^5\Gamma^\gamma_{4\delta} + 2 \cdot {}^5\Gamma^\delta_{44} {}^5\Gamma^4_{4\delta} \quad (\text{B.16})$$

であり、 5G_2 は、

$${}^5G_2 = s_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2s_{4\beta}\gamma^{4\beta} + s_{44}\gamma^{44}, \quad (\text{B.17})$$

$$s_{\alpha\beta} = \Gamma_\gamma {}^5\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + {}^5\Gamma_4 {}^5\Gamma_{\alpha\beta}^4, \quad (\text{B.18})$$

$$s_{4\beta} = \Gamma_\gamma {}^5\Gamma_{4\beta}^\gamma + {}^5\Gamma_4 {}^5\Gamma_{4\beta}^4, \quad (\text{B.19})$$

$$s_{44} = \Gamma_\gamma {}^5\Gamma_{44}^\gamma \quad (\text{B.20})$$

となる。

通常のカルツァ・クライン理論 (第4章) では、 $c_\mu = 0$ である。(4.17) の導出はこの場合に行えば良い。この場合でも 5G の計算はやや面倒であるが、 $c_\mu \neq 0$ の場合に比べてずっと楽である。 ${}^5\Gamma_{ab}^c$ には、 $F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} - A_\mu c_\nu + A_\nu c_\mu$ の組み合わせは現れない。 5G を計算し、 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の項を出すのは非常に大変である。

より詳しい計算は [16] を参照。

C 不変変分論

この章は [3, 4, 8] を参考にした。

この章では、この章では、 D 次元時空を考える。ラグランジアン密度 \mathcal{L} に $\sqrt{-g}$ をかけたものを \mathcal{L} と書く。

C.1 準備

ラグランジアン密度 \mathcal{L} は、場 ψ^A とその微分 $\partial_\mu \psi^A$ で表される。 $A = 1, 2, \dots, N$ とし、 A はテンソル添え字も含むとする。微小変換

$$\delta x^\mu \stackrel{\text{def}}{=} x'^\mu - x^\mu, \quad (\text{C.1})$$

$$\delta \psi^A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi'^A(x') - \psi^A(x) \quad (\text{C.2})$$

の下で、作用

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} d^D x \mathcal{L} \quad (\text{C.3})$$

は、

$$S' = \int_{\Omega} d^D x \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \mathcal{L}(\psi + \delta\psi, \partial_\mu \psi + \delta\partial_\mu \psi) \quad (\text{C.4})$$

に変わる。ヤコビアンは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} &\stackrel{\text{def}}{=} \det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

であるので、

$$\begin{aligned} \delta S &\stackrel{\text{def}}{=} S' - S \\ &= \int_{\Omega} d^D x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \delta \psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \delta (\partial_\mu \psi^A) + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right] \\ &=: \int_{\Omega} d^D x \delta \mathcal{L} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

となる。今、

$$\bar{\delta} F(x) \stackrel{\text{def}}{=} F'(x')|_{x'=x} - F(x) \quad (\text{C.7})$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \delta F(x) &= F'(x') - F'(x')|_{x'=x} + F'(x')|_{x'=x} - F(x) \\ &= \partial_\mu F \delta x^\mu + \bar{\delta} F(x) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

であり、

$$\bar{\delta}(\partial_\mu F) = \partial_\mu(\bar{\delta}F), \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\mu F) &= \bar{\delta}(\partial_\mu F) + \partial_\nu \partial_\mu F \delta x^\nu \\ &= \partial_\mu(\bar{\delta}F) + \partial_\nu \partial_\mu F \delta x^\nu \\ &= \partial_\mu(\delta F) - \partial_\nu F \partial_\mu(\delta x^\nu) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

が従う。よって、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} (\bar{\delta} \psi^A + \partial_\mu \psi^A \delta x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} (\partial_\mu (\bar{\delta} \psi^A) + \partial_\nu \partial_\mu \psi^A \delta x^\nu) + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \\ &= [\mathcal{L}]_A \bar{\delta} \psi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} \partial_\mu \psi^A \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \partial_\nu \partial_\mu \psi^A \delta x^\nu \\ &\quad + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \bar{\delta} \psi^A \right) \\ &= [\mathcal{L}]_A \bar{\delta} \psi^A + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \bar{\delta} \psi^A \right) \\ &= [\mathcal{L}]_A \bar{\delta} \psi^A + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \bar{\delta} \psi^A + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

となる。ここで、

$$[\mathcal{L}]_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^A} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \quad (\text{C.12})$$

である。 $\bar{\delta}$ の代わりに δ を使うと、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= [\mathcal{L}]_A (\delta \psi^A - \partial_\mu \psi^A \delta x^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \delta \psi^A - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \partial_\nu \psi^A \delta x^\nu + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \\ &= [\mathcal{L}]_A (\delta \psi^A - \partial_\mu \psi^A \delta x^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \delta \psi^A - \Xi^\mu{}_\nu \delta x^\nu \right) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

となる。ここで、

$$\Xi^\mu{}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \partial_\nu \psi^A - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} =: \sqrt{-g} \Xi^\mu{}_\nu \quad (\text{C.14})$$

である。 $\Xi^\mu{}_\nu$ は正準エネルギー・運動量テンソルと呼ばれる²⁰⁾。

C.2 Noether の第1定理

n 個の実数パラメータ ε^r ($r = 1, 2, \dots, n$)に依存する大域的変換

$$x'^\mu = f^\mu(\varepsilon, x), \quad (\text{C.15})$$

$$\psi'^A = [\mathbf{T}(\varepsilon)]^A{}_B \psi^B \quad (\text{C.16})$$

²⁰⁾しかし、一般にこれはテンソルの成分ではない。

を考える。ただし、 $\mathbf{T}(\varepsilon)$ は線形リー群 G の表現になっているとする。 $\varepsilon = 0$ が恒等変換になるものとする。無限小変換は、

$$\delta x^\mu = \varepsilon^r f_r^\mu(x), \quad (\text{C.17})$$

$$\delta \psi^A = \varepsilon^r [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B \quad (\text{C.18})$$

である。ただし、

$$f_r^\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial f^\mu}{\partial \varepsilon^r} \right|_{\varepsilon=0} \quad (\text{C.19})$$

である。 \mathbf{G}_r は、 G のリー代数の基底である。

無限小変換に対する (C.13) の $\delta \mathcal{L}$ は、

$$\delta \mathcal{L} = \varepsilon^r \mathcal{L}_r, \quad (\text{C.20})$$

$$\mathcal{L}_r \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{L}]_A ([\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B - \partial_\mu \psi^A f_r^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B - \Xi^\mu_\nu f_r^\nu \right) \quad (\text{C.21})$$

である。無限小変換で $\delta \mathcal{L} \equiv 0$ となるとすると²¹⁾、 $\mathcal{L}_r \equiv 0$ 、すなわち、

$$[\mathcal{L}]_A ([\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B - \partial_\mu \psi^A f_r^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B - \Xi^\mu_\nu f_r^\nu \right) \equiv 0 \quad (\text{C.22})$$

が従う。運動方程式の下で、

$$\partial_\mu \mathbf{J}_r^\mu = 0, \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{J}_r^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\mathbf{G}_r]^A_B \psi^B - \Xi^\mu_\nu f_r^\nu \quad (\text{C.24})$$

が従う。これを Noether の第 1 定理という。 \mathbf{J}_r^μ を Noether current という。

C.3 Noether の第 2 定理

次に局所変換

$$\delta x^\mu = \varepsilon^r(x) f_r^\mu(x), \quad (\text{C.25})$$

$$\delta \psi^A = \varepsilon^r(x) G_r^A(x) + \partial_\mu \varepsilon^r F_r^{A,\mu}(x) \quad (\text{C.26})$$

を考える。この時、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &\equiv [\mathcal{L}]_A (\delta \psi^A - \partial_\mu \psi^A \delta x^\mu) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} \delta \psi^A - \Xi^\mu_\nu \delta x^\nu \right) \\ &\equiv [\mathcal{L}]_A \left\{ \varepsilon^r [G_r^A - \partial_\mu \psi^A f_r^\mu(x)] + \partial_\mu \varepsilon^r F_r^{A,\mu} \right\} \\ &\quad + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^A)} [\varepsilon^r G_r^A + \partial_\nu \varepsilon^r F_r^{A,\nu}] - \Xi^\mu_\nu \varepsilon^r f_r^\nu \right) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

²¹⁾ ‘ \equiv ’ は運動方程式を使わずに成り立つ式を表す。

である。第1項の中の最後の項は、

$$[\mathcal{L}]_A \partial_\mu \varepsilon^r F_r^{A,\mu} = \partial_\mu([\mathcal{L}]_A \varepsilon^r F_r^{A,\mu}) - \varepsilon^r \partial_\mu([\mathcal{L}]_A F_r^{A,\mu}) \quad (\text{C.28})$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} \equiv \varepsilon^r \left\{ [\mathcal{L}]_A [G_r^A - \partial_\mu \psi^A f_r^\mu(x)] - \partial_\mu([\mathcal{L}]_A F_r^{A,\mu}) \right\} \\ + \partial_\mu(\mathbf{B}_r^\mu \varepsilon^r + \mathbf{C}^{\mu,\nu}_r \partial_\nu \varepsilon^r) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

となる。ただし、

$$\mathbf{B}_r^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^A)} G_r^A - \Xi^\mu_\nu f_r^\nu + [\mathcal{L}]_A F_r^{A,\mu}, \quad (\text{C.30})$$

$$\mathbf{C}_r^{\mu,\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^A)} F_r^{A,\nu} \quad (\text{C.31})$$

である。作用の変化は、

$$\begin{aligned} \delta S \equiv \int_\Omega d^D x \varepsilon^r \left\{ [\mathcal{L}]_A [G_r^A - \partial_\mu \psi^A f_r^\mu] - \partial_\mu([\mathcal{L}]_A F_r^{A,\mu}) \right\} \\ + \int_\Omega d^D x \partial_\mu(\mathbf{B}_r^\mu \varepsilon^r + \mathbf{C}_r^{\mu,\nu} \partial_\nu \varepsilon^r) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

である。 Ω は任意の領域である。さて、今、 $\delta \mathcal{L} \equiv 0$ だったとする。上の第2項の表面項が落ちるように ε^r を選べるので、

$$[\mathcal{L}]_A [G_r^A - \partial_\mu \psi^A f_r^\mu] - \partial_\mu([\mathcal{L}]_A F_r^{A,\mu}) \equiv 0 \quad (\text{C.33})$$

が従う。これを $\delta S \equiv 0$ に代入し、

$$\partial_\mu(\mathbf{B}_r^\mu \varepsilon^r + \mathbf{C}_r^{\mu,\nu} \partial_\nu \varepsilon^r) \equiv 0 \quad (\text{C.34})$$

を得る。これは、

$$\partial_\mu \mathbf{B}_r^\mu \varepsilon^r + (\mathbf{B}_r^\nu + \partial_\mu \mathbf{C}_r^{\mu,\nu}) \partial_\nu \varepsilon^r + \mathbf{C}_r^{(\mu,\nu)} \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon^r \equiv 0 \quad (\text{C.35})$$

を意味する。 $()$ は対称化の記号である。 ε は任意なので、

$$\partial_\mu \mathbf{B}_r^\mu \equiv 0, \quad (\text{C.36})$$

$$\mathbf{B}_r^\nu + \partial_\mu \mathbf{C}_r^{\mu,\nu} \equiv 0, \quad (\text{C.37})$$

$$\mathbf{C}_r^{(\mu,\nu)} \equiv 0 \quad (\text{C.38})$$

を得る。この3式と(C.33)をNoetherの第2定理という。(C.36)は(C.37)と(C.38)を組み合わせれば導く事が出来る。

References

- [1] Lochlainn O’Raifeartaigh, “The Dawning of Gauge Theory”, Princeton University Press (1997).
- [2] 太田浩一『マクスウェルの渦・アインシュタインの時計—現代物理学の源流』(東京大学出版会, 2005年).
- [3] 内山龍雄『一般ゲージ場論序説』(岩波書店, 1987年).
- [4] 内山龍雄『一般相対性理論』(裳華房, 1978年).
- [5] R. Utiyama, “Invariant Theoretical Interpretation of Interaction”, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
- [6] 内山龍雄『物理学はどこまで進んだか—相対論からゲージ論へ』(岩波書店, 1983年).
- [7] 内山龍雄ら『龍雄先生の冒険 回想の内山龍雄：一般ゲージ場理論の創始者』(窮理舎, 2019年).
- [8] 中嶋 慧, 松尾 衛『一般ゲージ理論と共変解析力学』(現代数学社, 2020年).
- [9] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [10] ワイル(著), 内山龍雄(訳)『空間・時間・物質』(講談社, 1973年)[ちくま学芸文庫の2007年のものもある].
- [11] パウリ(著), 内山龍雄(訳)『相対性理論』(講談社, 1974年)[ちくま学芸文庫の2007年のものもある].
- [12] 藤井保憲『超重力理論入門』(産業図書, 2005年).
- [13] 佐藤 文隆, 小玉 英雄『一般相対性理論』(岩波書店, 1992年).
- [14] モリニーゴ, ワーグナー(著), 和田 純夫(訳)『ファインマン講義重力の理論』(岩波書店, 1999年).
- [15] サイト「物理のページ」の「一般相対性理論」:
<http://www.geocities.jp/nososnd/grel/grel.html>
- [16] 中嶋 慧「カルツァ・クラインの計算とクラインのゲージ理論」:
<http://physnakajima.html.xdomain.jp/KK.pdf>
- [17] 中嶋 慧「一般ゲージ場論」:
<http://physnakajima.html.xdomain.jp/gauge.pdf>